

Ein numerisches Verfahren zur Strömungssimulation in zeitveränderlichen Gebieten mit integriertem Modul zur Gitternachführung

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur (FH)
Andreas Wick
aus Meckenbeuren

Von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
– Dr.-Ing. –
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. habil. Andreas Dillmann
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Frank Thiele
Prof. Dr.rer.nat. Michael Schäfer

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 27.01.2003

Berlin 2003
D 83

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Doktorand am Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsmechanik der TU Berlin.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Thiele, der diese Arbeit betreut hat sowie Herrn Prof. Dr.rer.nat. M. Schäfer für die Übernahme des Koreferats.

Auch bei meinen Kollegen, allen voran den Herrn Dipl.-Ing. Markus Schatz und Dipl.-Ing. Norbert Schönwald, möchte ich mich für die vielen anregenden Diskussionen und die gute Zusammenarbeit bedanken. Frau Sabine Honigmann danke ich ganz herzlich für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts.

Meinen Eltern und Maryam danke ich für ihre Geduld und den bedingungslosen Rückhalt, den sie mir gaben.

Der Dr. Fritz Walter Fischer-Stiftung sowie der Kommission zur Vergabe von Promotionsstipendien (NaFöG) möchte ich abschließend für die finanzielle Förderung dieser Arbeit danken.

Berlin, im Januar 2003

Andreas Wick

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	v
1 Einleitung	1
1.1 Stand der Forschung	1
1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit	5
2 Grundgleichungen	7
2.1 Verallgemeinerte Variablentransformation	7
2.2 Strömungsmechanische Bilanzgleichungen	9
2.3 Turbulenzmodelle	10
2.3.1 Reynoldsmittelung	10
2.3.2 Wirbelzähigkeitsmodelle	12
3 Numerik	15
3.1 Allgemeine Diskretisierungsverfahren	15
3.2 Ein illustratives Beispiel	16
3.3 Diskretisierung	18
3.3.1 Zeitliche Diskretisierung	18
3.3.2 Diffusionsterm	19
3.3.3 Konvektionsterm	20
3.4 Bestimmung des Drucks	26
3.5 Implementierung der Randbedingungen	26
3.5.1 Randbedingungen für die Bilanzgleichungen	27
3.5.2 Randbedingung für den Druck	29
3.6 Lösung des algebraischen Gleichungssystems	29
4 Validierung des Programms	30
4.1 Gleichförmige Strömung auf transientem Gitter	30
4.2 Oszillierende Platte	32
4.3 Rotierender Kanal	34

5	Methoden zur Gitternachführung	40
5.1	Algebraische Methoden	41
5.2	Differentielle Methoden	42
5.3	Analogien zur Strukturmechanik	44
5.3.1	Algorithmus zur nichtlinearen Minimierung	44
5.3.2	Federanalogie-Modell	47
5.3.3	Linear-elastisches Modell	48
5.3.4	Hyperelastisches Modell	52
6	Beispiele dynamischer Gitter	56
6.1	Deformationsanalyse	56
6.2	Keil in Kanal	62
6.3	Tragflügel mit beweglicher Klappe	68
6.4	Zweiteiliger Tragflügel	71
7	Exemplarische Anwendung	74
7.1	Integration der Module	74
7.2	Oszillierender Tragflügel	76
7.2.1	Phänomenologie des Dynamic Stall	76
7.2.2	Numerische Simulation	79
8	Zusammenfassung und Ausblick	94
A	Tensoranalysis	97
B	Verallgemeinerung des Energiefunktionals H für den 3D-Fall	100
	Literaturverzeichnis	102

Nomenklatur

Das Symbolverzeichnis erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es soll vielmehr die wichtigsten Symbole erklären, die über grössere Textpassagen hinweg Verwendung finden. Ansonsten sei auf die Definition der Symbole im laufenden Text verwiesen. Doppelt auftretende griechische Indizes implizieren eine Summation über den Wertevorrat $\{1,2\}$ (Einsteinsche Summationskonvention).

Formelzeichen

\mathbf{x}	Ortsvektor
$\mathbf{x}_{,\tau} = \dot{\mathbf{x}}$	Gittergeschwindigkeit
\mathbf{u}	Reynolds-gemittelte Strömungsgeschwindigkeit
\mathbf{u}_r	Reynolds-gemittelte Relativgeschwindigkeit
\mathbf{w}	Verschiebungsvektor
δ	Einheitstensor
ϱ	Dichte
p	Reynolds-gemittelter statischer Druck
μ	dynamische molekulare Viskosität
ν	kinematische molekulare Viskosität
k	spezifische turbulente kinetische Energie
ω	spezifische Dissipationsrate von k
$u^{(\alpha)} : u, v$	kartesische Komponenten des Geschwindigkeitsvektors
$w^{(\alpha)} : a, b$	kartesische Komponenten des Verschiebungsvektors
$x_\alpha : x, y$	kartesische Koordinaten
$\xi^\alpha : \xi, \eta$	allgemeine (krummlinige) Koordinaten
J	Jacobi-Determinante der Abbildung \mathcal{T}
$A_{\alpha\beta}$	Adjunkten der Jacobi-Matrix der Abbildung \mathcal{T}
$g^{\alpha\beta}$	kovariante Metrikkoeffizienten
$g_{\alpha\beta}$	kontravariante Metrikkoeffizienten
M	Maß für Gitterverzerrung
c_l, c_m, c_d	Auftriebs-, Momenten- und Druckbeiwert
$Re = \frac{LU_\infty}{\nu}$	Reynoldszahl
$Ro = \frac{\Omega L}{U_\infty}$	Rosbyzahl
$St = \frac{fL}{U_\infty}$	Strouhalzahl

Indizes

$[\mathbf{e}]_i$	i-te Komponente des Vektors \mathbf{e}
$(\cdot)_\alpha$	kovarianter Tensorindex
$(\cdot)^\alpha$	kontravarianter Tensorindex
$(\cdot)^{(\alpha)}$	kartesischer Tensorindex
$(\cdot)^n$	zum Zeitpunkt t^n
$(\cdot)^{(k)}$	zum Iterationsschritt k
$(\cdot)_i$	im Gitterpunkt \mathbf{x}_i
$(\cdot)_\infty$	Zuströmgröße
$(\cdot)'$	Schwankungsanteil einer fluktuierenden Größe
$(\cdot)_t$	turbulent
$(\cdot)_e$	effektiv

Operatoren, Funktionen und Symbole

$\nabla(\cdot)$	Linksgradient
$(\cdot)\nabla$	Rechtsgradient
$\nabla \cdot (\cdot)$	Linksdivergenz
$\nabla^2(\cdot)$	Laplace-Operator
$(\cdot)_{,\xi^\alpha} = \partial_{\xi^\alpha}$	Ableitung nach ξ^α
$(\cdot)'$	Kurzschreibweise für ∂_ξ
$(\cdot)''$	Kurzschreibweise für ∂_η
$\nabla_{\mathbf{w}}(\cdot)$	Gradient bezüglich \mathbf{w}
$\nabla_{\mathbf{w}}^2(\cdot)$	Gradient von $\nabla_{\mathbf{w}}(\cdot)$ bezüglich \mathbf{w}
$\overline{(\cdot)}$	Reynoldsmittelung
$\langle (\cdot, \cdot) \rangle$	Skalarprodukt für vektorwertige Funktionen
$\ \cdot\ $	Fehlernorm
$(\cdot) \times (\cdot)$	Kreuzprodukt
$(\cdot) \cdot (\cdot)$	Skalarprodukt
$(\cdot) \cdot \cdot (\cdot)$	Doppelte Überschiebung
$(\cdot)^T$	Transposition
$\mathcal{O}(\cdot)$	von der Ordnung

Abkürzungen

ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
BDF	Backward Differencing Formula
CDS	Central Differencing Scheme
DIGL	Diffusionsgleichung
FAM	Federanalogie-Modell
FV	Finite Volumen
HEM	Hyperelastisches Modell
HEM*	Hyperelastisches Modell mit h^*
LAGL	Laplace-Gleichung
LED	Local Extremum Diminishing
LEM	Linear-elastisches Modell
LLR	Local-Linear-Realizable
LUDS	Linear Upwind Difference Scheme
PCG	Preconditioned Conjugate Gradients
QUICK	Quadratic Upstream Interpolation of Convective Kinematics
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SIP	Strongly Implicit Procedure
SST	Shear Stress Transport
TFI	Transfinite Interpolation
TVD	Total Variation Diminishing
UMIST	Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport
VCL	Volume Conservation Law

1 Einleitung

Für die Analyse strömungsmechanischer Problemstellungen haben numerische Verfahren stark an Bedeutung gewonnen. Neben den nach wie vor notwendigen experimentellen Versuchen, hat sich die numerische Strömungssimulation als wesentliches Hilfsmittel des anwendungsorientierten Ingenieurs etabliert. Dies ist zum einen auf die großen Fortschritte bei der Entwicklung realitätsnaher Modelle und effizienter Algorithmen zurückzuführen. Zum anderen ist der Erfolg der numerischen Verfahren naturgemäß eng verknüpft mit der Leistungsfähigkeit elektronischer Rechenanlagen, welche im Verlauf der letzten Jahrzehnte um mehrere Größenordnungen gestiegen ist.

Die hohe Rechengeschwindigkeit und die große Speicherkapazität moderner Computer ermöglichen es, zunehmend komplexe physikalische Probleme numerisch zu simulieren. Aeroelastizität, strömungstechnische Profilloptimierung und Biofluidmechanik gehören mit zu den Gebieten, welche derzeit Gegenstand intensiver Forschungsbemühungen sind. Ein gemeinsames Charakteristikum dieser auf den ersten Blick recht unterschiedlichen Anwendungsgebiete ist, dass sich die Strömungsberandung kontinuierlich ändern kann. Das in Abbildung 1.1 dargestellte Segelflugzeug ist ein anschauliches Beispiel hierfür. Die Flügeldurchbiegung wird durch aerodynamische Kräfte hervorgerufen, welche ihrerseits von der genauen Flügelform abhängen. Bei einer numerischen Simulation der Flugzeugumströmung müsste man zunächst von starren, unverformten Flügeln ausgehen. Im Verlaufe der Rechnung würden sich dann aufgrund der Fluid-Struktur-Interaktion die Flügel nach und nach verformen, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat.

Ein konventionelles Verfahren zur numerischen Strömungssimulation ist für Probleme dieser Art nur bedingt geeignet. Um der Zeitabhängigkeit des betrachteten Gebiets auf angemessene Weise Rechnung zu tragen, muss das numerische Verfahren an die veränderte Aufgabenstellung angepasst werden.

1.1 Stand der Forschung

Im Rahmen dieser Arbeit soll der allgemeinste Fall einer Bewegung betrachtet werden. Das bedeutet, dass sich die beweglichen Teile der Strömungsberandung nicht wie Starrkörper verhalten, sondern auch deformiert werden können. Als Folge dessen werden in der Regel einige Modifikationen und Erweiterungen des numerischen Verfahrens erforderlich. Diese betreffen sowohl die Erhaltungsgleichungen selbst als auch die Dis-



Abbildung 1.1: *Segelflugzeug im Flug, Durchbiegung der Flügelspitzen $> 5\%$ der Halbspannweite*

ketisierung des Berechnungsgebietes. Nachfolgend wird ein Überblick zu diesen beiden Forschungsschwerpunkten gegeben.

Strömungssimulation

Bereits in den 60er Jahren wurde eine verallgemeinerte Form der Erhaltungsgleichungen eingeführt [TT61, Noh64], welche die Vorteile der in der Strukturmechanik vorherrschenden Lagrange'schen Betrachtungsweise und der in der Strömungsmechanik üblichen Euler'schen Betrachtungsweise in sich vereint. Während in früheren Arbeiten verschiedene Begriffe wie z. B. 'Mixed Eulerian-Lagrangian' oder 'Quasi-Eulerian' gebräuchlich waren, hat sich mittlerweile die von Hirt u. a. [HAC74] geprägte Bezeichnung 'Arbitrary Lagrangian-Eulerian' (ALE) zur Beschreibung der verallgemeinerten Form der Erhaltungsgleichungen durchgesetzt.

Im Kontext strukturierter Rechengitter lässt sich die ALE-Form mit Hilfe einer verallgemeinerten Koordinatentransformation [Gar98] herleiten. Bei der Herleitung der ALE-Gleichungen aus der verallgemeinerten Koordinatentransformation wird das sogenannte 'Volume Conservation Law' (VCL) verwendet, auf dessen Bedeutung erstmals von Thomas und Lombard [TL79] hingewiesen wurde. Das VCL verknüpft die Gittergeschwindigkeit mit der zeitlichen Veränderung des Zellvolumens. Die bei der numerischen Auswertung von Gittergeschwindigkeit und Zellvolumen verwendeten Approximationen müssen deshalb konsistent sein. Wird dies nicht beachtet, können numerische Fehler die Lösung stark verfälschen [TL79, Hin82, LF95, KF99, Wal99]. Thomas und Lombard schlugen vor, mit Hilfe des VCL aus der Gittergeschwindigkeit die zeitliche Änderung des Zellvolumens zu bestimmen. Um den durch die zeitliche Variation des Rechengitters hervorgerufenen numerischen Fehler zu vermeiden, muss dabei zur Lösung des VCL genau dasselbe Schema verwendet werden wie für die übrigen Erhaltungsgleichungen [TL79, Bat90, GS95]. Mittlerweile hat sich jedoch eine ande-

re Vorgehensweise durchgesetzt, bei der die in den Erhaltungsgleichungen benötigte Normalkomponente der Gittergeschwindigkeit explizit durch die Volumeninkremente ausgedrückt wird [DP88, TRPC92, ZRTC93, Lai93, WY94, WP94, BN95]. Diese lassen sich leicht aus den Gitterpunktkoordinaten bestimmen. Die beschriebene Vorgehensweise kommt fast ausschließlich in Verbindung mit der wenig genauen zeitlichen Diskretisierung erster Ordnung zum Einsatz. Diese Beobachtung machten auch Koobus und Farhat [KF99]. Sie stellten in ihrer Arbeit eine zur genaueren zeitlichen Diskretisierung zweiter Ordnung konsistente Implementierung des VCL vor. Bei der Untersuchung zweier reibungsfreier Strömungsprobleme erzielten sie damit im Vergleich zu der sonst üblichen Implementierung des VCL eine signifikante Verbesserung der numerischen Ergebnisse.

In der Literatur finden sich eine Reihe von Testfällen zur Verifikation und Validierung des VCL beziehungsweise des gesamten ALE-Formalismus. Viele Autoren (z. B. [Hin82, Bat91, DP88, Vin89, ZRTC93, NG94]) haben einen einfachen Test empfohlen, mit dem überprüft werden kann, ob das numerische Verfahren das VCL erfüllt. Dazu wird zunächst die Lösungsprozedur mit einem räumlich konstanten Strömungsfeld initialisiert und anschließend die Gitterpunkte im Innern des Berechnungsgebietes bewegt. Die Gitterbewegung darf, abgesehen von einer Abweichung in der Größenordnung des Maschinenfehlers, das Strömungsfeld nicht beeinflussen. Eine zur Validierung des ALE-Formalismus ebenfalls sehr verbreitete Konfiguration ist die transsonische, instationäre Umströmung eines oszillierenden NACA0012-Tragflügels [ATR87, HY93, CG95, GS95, JFH⁺95, SNB95, WP97]. In den hier zitierten Arbeiten basierte die numerische Simulation auf der Annahme reibungsfreier Strömung. Die Abweichung der Ergebnisse von experimentellen Vergleichsdaten wurde auf diese vereinfachende Betrachtungsweise zurückgeführt. Demirdžić und Perić [DP90] stellten ein Finite-Volumen-Verfahren zur Strömungssimulation in zeitveränderlichen Gebieten vor. Zur Validierung des Verfahrens berechneten sie damit die laminare Strömung in einem Kanal mit bewegter Verjüngung. Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigte eine gute qualitative Übereinstimmung. Eine Gitterverfeinerung führte zu verbesserten Ergebnissen. Aufgrund der beschränkten Rechnerkapazität konnte die völlige Gitterunabhängigkeit der numerischen Lösung jedoch nicht demonstriert werden. Dieselbe Strömungskonfiguration wurde auch von Wall [Wal99] zur Validierung einer ALE-Finite-Elemente-Methode verwendet. Angesichts der hervorragenden grundsätzlichen Übereinstimmung zwischen Numerik und Experiment kam Wall zu dem Schluss, dass die verwendete ALE-Methode in der Lage ist, die auftretenden strömungsphysikalischen Phänome genau darzustellen.

Gitternachführung

Ein integraler Bestandteil des ALE-Formalismus ist die Anpassung des Rechengitters an die sich verändernde Strömungsberandung. Hierzu wurden im Verlauf der Zeit eine Reihe von Methoden vorgeschlagen.

Für blockstrukturierte Rechengitter mit hinreichend einfacher Topologie sind algebraische Methoden — vor allem hinsichtlich des Rechenzeitbedarfs — unschlagbar

[WY94, HBB00, BRW00]. Sehr verbreitet sind auch Methoden, die auf einer Strukturanalogie basieren. Sie sind nicht an eine bestimmte Art der Diskretisierung des Berechnungsgebietes gebunden und werden vor allem in Verbindung mit unstrukturierten Gittern eingesetzt. Der wohl bekannteste Vertreter dieser Klasse ist das Federanalogiemodell von Batina [Bat89, Bat91, LRB93]. Es wurde ursprünglich zur Berechnung der reibungsfreien Umströmungen sich bewegender Körper entwickelt. Für Strömungssimulationen auf der Grundlage der Navier-Stokes'schen Gleichungen ist diese Methode nur bedingt geeignet, da sie kaum dazu in der Lage ist, Überschneidungen benachbarter Gitterlinien in dem in Körperrnähe stark verdichteten Gitterbereich zu verhindern [CHLD97, AV99]. Bartels [Bar00] kombinierte das Federanalogiemodell mit einer lokalen Starrkörperbewegung, welche das Verschiebungsfeld in Körperrnähe dominiert und mit zunehmendem Abstand von der Wand exponentiell an Einfluss verliert. Auf diese Weise konnten Überschneidungen verhindert werden. Die von Bartels gewählte Form der Implementierung eignet sich allerdings nur für einfache strukturierte Gitter. Eine im Grunde sehr ähnliche Idee verfolgten Anderson und Venkatakrishnan [AV99]. Im Unterschied zu Bartels griffen sie bei der Konstruktion der exponentiellen Abklingfunktion des Starrkörperanteils jedoch nicht auf eine gitterspezifische Datenstruktur zurück, sondern verwendeten hierzu den Wandabstand. Die Anpassung des unstrukturierten Gitters eines einfachen Tragflügels an eine starke Randdeformation gelang mit diesem modifizierten Federanalogiemodell sehr gut. Die Autoren merkten allerdings an, dass ihre Methode auf Problemstellungen beschränkt ist, bei denen relativ zueinander bewegte Körper einen genügend großen Abstand voneinander haben.

Ein gemeinsames Merkmal der bisher beschriebenen Methoden ist, dass sie wenig Rechenzeit benötigen. Dies gilt nicht für Ansätze, die auf der Lösung von Differentialgleichungen beruhen. Im Vergleich zu den einfacheren Methoden verfügen sie jedoch eher über das Potential, die Qualität des Gitters zu erhalten. Bereits 1980 lösten Lynch und O'Neill [LO80] eine einfache Form der Navier'schen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie¹, um ein geeignetes Verschiebungsfeld zur Gitternachführung zu erhalten. Johnson und Tezduyar [JT94] griffen diese Idee auf, legten ihrer Arbeit jedoch eine allgemeinere Form der Navier'schen Gleichungen zu Grunde. Sie fanden heraus, dass sich die beste Gitterqualität erzielen lässt, wenn die Querdehnungszahl gleich Null gesetzt wird. Ein Vergleich dieser Methode mit dem Federanalogiemodell wurde von Cavallo u. a. durchgeführt [CHLD97]. Es zeigte sich, dass pathologische Erscheinungen, wie z. B. negative Zellvolumen, erst bei wesentlich größeren Deformationen auftreten wenn das Gitter als linear-elastischer Festkörper modelliert wird.

Mit einer deutlichen Verschlechterung der Gitterqualität, bis hin zu Überschneidungen benachbarter Gitterlinien, muss vor allem dann gerechnet werden, wenn das Verschiebungsfeld keine glatte Funktion ist. Es ist nun naheliegend, das Verschiebungsfeld durch Lösung einer Laplace-Gleichung zu bestimmen [Ili94], da die Laplace-Gleichung dafür bekannt ist, sehr glatte Lösungen zu liefern. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass

¹Diese Gleichungen werden auch als Verschiebungsdifferentialgleichungen bezeichnet.

sich mit dieser Methode nur unwesentlich bessere Ergebnisse erzielen lassen als mit dem Federanalogiemodell. Crumpton und Giles [CG95] ebenso wie auch Löhner und Yang [LY96] haben die Laplace-Gleichung deshalb mit einem Diffusionskoeffizienten versehen, der den Zweck hat, die besonders gefährdeten kleinen Gitterzellen nahe der Gebietsberandung vor allzu großer Deformation zu schützen. Über diesen Koeffizienten kann die Verteilung der Verzerrung über das Berechnungsgebiet — in begrenztem Maße — gesteuert werden.

In einer aktuellen Bestandsaufnahme zum Thema “Gittergenerierung” kam Soni zu dem Schluss, dass sich die gegenwärtig zur Verfügung stehenden Methoden zur Gitternachführung nur für vergleichsweise einfache Konfigurationen eignen [Son00]. Auch andere Autoren (z. B. [NGH98, GW98, SOL00]) betonen immer wieder den Bedarf für ein effizientes Verfahren zur Gitternachführung, welches auch in komplexen Konfigurationen und bei großen Randdeformationen befriedigende Ergebnisse liefert.

1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Erweiterung eines Finite-Volumen-Verfahrens, um damit numerische Strömungssimulationen in zeitveränderlichen Gebieten durchführen zu können. Dabei sollen methodische Aspekte und weniger die eigentlichen Anwendungen im Vordergrund stehen. Den Ausgangspunkt bildet ein von Rung [Run97] zur Lösung zweidimensionaler Problemstellungen entwickeltes Verfahren, dem eine blockstrukturierte Diskretisierung des Berechnungsgebietes zu Grunde liegt. Das Verfahren ist in Form eines Fortran 77-Programms mit dem Namen *Elan2* implementiert.

Mit Hilfe des in Kapitel 2 ausführlich beschriebenen ALE-Formalismus gelingt es, durch vergleichsweise wenige Veränderungen des ursprünglichen Simulationsprogramms ein sehr viel größeres Anwendungsfeld zu erschließen. Die spezielle Gestalt der zu Grunde liegenden Erhaltungsgleichungen, die verwendeten Diskretisierungsschemata (Kapitel 3), das Turbulenzmodell sowie die Qualität des Rechengitters sind Einflussgrößen, welche die Güte einer numerischen Strömungssimulation maßgeblich beeinflussen. Die Wechselwirkungen zwischen diesen Größen sind recht komplex. Die Modifikation einer dieser Größen kann deshalb vielschichtige und weitreichende Auswirkungen haben. Vor diesem Hintergrund erscheint eine besonders sorgfältige Verifikation der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Erweiterungen des Finite-Volumen-Verfahrens notwendig. Hierzu wurde ein neuer Testfall ausgewählt, der wesentlich besser als andere, bekannte Testfälle dazu geeignet ist, eventuelle Schwächen des hier verwendeten Ansatzes zu identifizieren und damit verbundene numerische Fehler zu quantifizieren (Kapitel 4).

Wie die Auswertung der Literatur gezeigt hat, wird innerhalb des gesamten ALE-Formalismus vor allem für das Teilproblem der Gitternachführung vielfach noch ein erheblicher Forschungsbedarf gesehen. Die gründliche Analyse der Stärken und Schwächen der zur Gitternachführung üblicherweise verwendeten Ansätze sowie die Entwick-

lung einer vielversprechenden neuen Methode bilden deshalb einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Während in diesem Zusammenhang das Kapitel 5 den theoretischen Hintergrund der verschiedenen Ansätze beleuchtet, steht in Kapitel 6 der Vergleich für ausgewählte Testfälle im Mittelpunkt.

Die Integration des Moduls zur Gitternachführung in den Strömungslöser ist so durchzuführen, dass das Modul als ‘Black Box’ verwendet werden kann. Die Gitternachführung soll vollautomatisch ablaufen. Das heißt insbesondere, dass — abgesehen von der Vorgabe des neuen Randes — keine weiteren Eingaben des Anwenders notwendig sind und keine optische Kontrolle der Gitterqualität im Verlauf der Strömungssimulation erforderlich ist. Der Rechenzeitbedarf für die Gitternachführung soll deutlich kleiner sein als für die Strömungsberechnung selbst. Inwieweit das Modul zur Gitternachführung diese Anforderungen erfüllt, wird in Kapitel 7 untersucht.

2 Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen der numerischen Strömungssimulation diskutiert. Der erste Abschnitt beschreibt eine verallgemeinerte Variablentransformation mit deren Hilfe es gelingt, die Grundgleichungen auf eine Form zu bringen, die für Problemstellungen mit zeitveränderlichen Geometrien geeignet ist. Der Abschnitt 2.2 befasst sich mit den strömungsmechanischen Bilanzgleichungen und Stoffgesetzen. In Abschnitt 2.3 werden schließlich die in dieser Arbeit zum Einsatz kommenden Turbulenzmodelle eingeführt. Für eine weiterführende Diskussion sei auf einschlägige Standardwerke (z. B. [Wil93, FP96, Gar98]) verwiesen.

2.1 Verallgemeinerte Variablentransformation

Im Kontext der strukturierten Diskretisierung des Berechnungsgebietes werden in der Regel krummlinige Koordinatensysteme verwendet. Zur Parametrisierung der physikalischen Ebene, repräsentiert durch die kartesischen Koordinaten x_α , wird eine Abbildung \mathcal{T} auf eine Rechenebene, repräsentiert durch die krummlinigen Koordinaten ξ^α , eingeführt. Um der Bewegung der Strömungsberandung auf angemessene Weise Rechnung zu tragen, muss der Abbildung die Zeit als unabhängige Variable hinzugefügt werden. Die verallgemeinerte Koordinatentransformation lautet somit:

$$\mathcal{T} : (x_\alpha, t) \mapsto (\xi^\alpha, \tau). \quad (2.1)$$

Die Konsequenzen für die Bilanzgleichungen sollen im Folgenden an einer Modellgleichung diskutiert werden. Als Ausgangspunkt der Überlegungen dient der Prototyp einer Bilanzgleichung für den konvektiven Transport einer Größe Φ unter der Einwirkung des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{U} :

$$\Phi_{,t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\Phi) = R. \quad (2.2)$$

R bezeichnet hierbei eine beliebige rechte Seite, welche sowohl von Φ als auch von \mathbf{U} abhängen kann. Bei der partiellen Ableitung nach der Zeit t werden die Koordinaten x_α festgehalten. Wenn die Geometrie sich zeitlich ändert, dann ist diese Form der zeitlichen Ableitung von geringem Nutzen. Andererseits sind die $\xi^\alpha = \text{const.}$ -Linien (das Rechengitter) so gewählt, dass sie im Parameterraum unabhängig von der Zeit sind. Die partielle Ableitung nach t muss also durch die partielle Ableitung nach τ

ersetzt werden. Das gelingt mit Hilfe der Kettenregel,

$$\Phi_{,\tau} = \Phi_{,t} + \nabla \Phi \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad (2.3)$$

wobei der Punkt auf dem Ortsvektor die Ableitung nach τ bezeichnet. Die partielle Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit, bei festgehaltenem ξ^α , ist gerade die Geschwindigkeit, mit der sich die Koordinatenlinien $\xi^\alpha = \text{const.}$ in der physikalischen Ebene bewegen. Sie wird deshalb auch als Gittergeschwindigkeit bezeichnet. Die Modellgleichung 2.2 lässt sich nun mit Hilfe von Gleichung 2.3 umformen zu:

$$\Phi_{,\tau} - \nabla \Phi \cdot \dot{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\Phi) = R. \quad (2.4)$$

Durch eine einfache tensoranalytische Umformung erhält man daraus:

$$\Phi_{,\tau} - [\nabla \cdot (\dot{\mathbf{x}}\Phi) - (\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}})\Phi] + \nabla \cdot (\mathbf{U}\Phi) = R. \quad (2.5)$$

Dies lässt sich kompakter schreiben,

$$\Phi_{,\tau} + (\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}})\Phi + \nabla \cdot (\mathbf{U}_r\Phi) = R, \quad (2.6)$$

wobei der Index “r” an der Bezeichnung $\mathbf{U}_r = \mathbf{U} - \dot{\mathbf{x}}$ den Bezug zur Kinematik widerspiegelt. Während \mathbf{U} die Absolutgeschwindigkeit darstellt, erkennt man in $\dot{\mathbf{x}}$ die Systemgeschwindigkeit und in \mathbf{U}_r die Relativgeschwindigkeit wieder. Thomas und Lombard [TL79] leiten eine Beziehung her, mit der die Divergenz der Systemgeschwindigkeit durch die Jacobi-Determinante der Transformationsbeziehung ausgedrückt werden kann:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{J} J_{,\tau}. \quad (2.7)$$

Sie bezeichnen diese Gleichung als ‘Geometric Conservation Law’. In späteren Veröffentlichungen (z. B. [ZRTC93, ICT⁺95, LF95]) wurde noch eine zweite geometrische Erhaltungsgleichung gefunden und diese mit der obigen Gleichung unter dem Begriff ‘Geometric Conservation Laws’ zusammengefasst, wobei die Gleichung 2.7 die Bezeichnung ‘Volume Conservation Law’ erhielt. Die zweite geometrische Erhaltungsgleichung, das sogenannte ‘Space Conservation Law’, ist bei zweidimensionalen Betrachtungen im Allgemeinen automatisch erfüllt [Vin89]. Mit Hilfe des ‘Volume Conservation Law’ — oder kurz VCL — gelangt man zur endgültigen Darstellung der Modellgleichung in verallgemeinerten Koordinaten. Sie lautet¹:

$$(J\Phi)_{,\tau} + \nabla \cdot (\mathbf{U}_r\Phi)J = RJ. \quad (2.8)$$

Schließlich erhält man daraus auch eine integrale Formulierung, wenn man die differentielle Form über den Parameterraum ξ^α integriert:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi dV + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{U}_r\Phi) dV = \int_V R dV. \quad (2.9)$$

¹Eine alternative Herleitung dieser Form der Bilanzgleichung, welche sich des Reynolds’schen Transporththeorems bedient, findet sich in [Sch95].

Integration und zeitliche Ableitung dürfen hierbei vertauscht werden, da sie voneinander unabhängig sind. Die partielle zeitliche Ableitung wird dabei zu einer gewöhnlichen zeitlichen Ableitung, da das Integral als extensive Größe nur von einer Variablen — der Zeit — abhängig ist. Man gelangt auf demselben Weg auch zu einer integralen Darstellung des VCL:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \int_V \nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} dV = 0. \quad (2.10)$$

2.2 Strömungsmechanische Bilanzgleichungen

Ausgehend von den klassischen axiomatischen Erhaltungsprinzipien für Masse, Impuls und Drehimpuls gelangt man mit Hilfe des Cauchy'schen Axioms und des Newton'schen Schubspannungsansatzes zu der Kontinuitätsgleichung und der Navier-Stokes'schen Gleichung. Die inkompressible Form dieser Gleichungen bildet die Grundlage der numerischen Strömungssimulation. Die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Fluid,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{U}_r dV = 0, \quad (2.11)$$

erhält man, wenn in Gleichung 2.9 für Φ die Dichte ϱ und für die rechte Seite Null eingesetzt wird. Die Navier-Stokes'sche Gleichung beschreibt die Zunahme des Impuls ($\Phi = \varrho \mathbf{U}$) durch die Einwirkung von Oberflächen- und Volumenkräften auf das Fluid. Bei Vernachlässigung von Volumenkräften — hervorgerufen z. B. durch die Erdbeschleunigung — umfasst die Bilanz einen instationären, einen konvektiven, einen diffusiven und einen Druckterm:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \mathbf{U} dV + \int_V \nabla \cdot (\varrho \mathbf{U}_r \mathbf{U}) dV = \int_V \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla) dV - \int_V \nabla \cdot P \boldsymbol{\delta} dV. \quad (2.12)$$

Hierbei bezeichnet μ die kinematische Zähigkeit, P den statischen Druck und $\boldsymbol{\delta}$ den Einheitstensor. Die Gleichungen 2.11 und 2.12 werden in der Literatur als 'Arbitrary Lagrangian-Eulerian' Form der Erhaltungsgleichungen bezeichnet. Sie stellt eine Verallgemeinerung der Euler'schen und der Lagrange'schen Betrachtungsweise dar. Die Abbildung 2.1 veranschaulicht die entsprechenden Zusammenhänge. Während das Rechengitter bei der Euler'schen Darstellung raumfest ist, folgen die Gitterpunkte bei der Lagrange'schen Darstellung der Bewegung der Fluidteilchen. Die ALE-Formulierung erlaubt im Gegensatz dazu eine beliebige Bewegung der Gitterpunkte. Dabei können die Gitterpunkte raumfest sein (Punkt A), sich wie materielle Punkte verhalten (Punkt B) oder einer beliebig vorgegebenden Bewegung folgen, sofern diese nicht zu Überschneidungen benachbarter Gitterlinien führt.

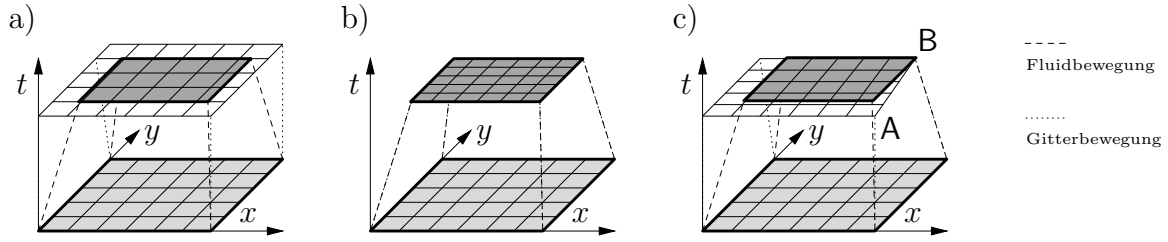


Abbildung 2.1: Grafische Interpretation der verschiedenen Betrachtungsweisen; a) Euler, b) Lagrange, c) ALE

2.3 Turbulenzmodelle

Die meisten technisch interessanten Strömungen zeichnen sich durch eine hohe Reynolds-Zahl Re und damit einhergehenden turbulentem Verhalten aus. Das Charakteristische an solchen Strömungen ist, dass es ein breites Band von signifikanten Skalen gibt, auf denen die Bewegung abläuft. Die enorme Komplexität turbulenter Strömungen rührt daher, dass es zwischen den einzelnen Skalen keine Trennung gibt, d. h. Turbulenz bedeutet Anregung der Moden auf allen Skalen. Bezeichnet L eine typische Länge der Strömungsgeschehens, so enthält ein Volumen der Größenordnung L^3 Freiheitsgrade in der Größenordnung $(Re)^{9/4}$ (vgl. [Eul00]). Diese Tatsache macht das Studium turbulenter Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen mit Hilfe direkter Simulation unmöglich — selbst bei Verwendung von Höchstleistungsrechnern — und hat zur Entwicklung einer Reihe von Turbulenzmodellen geführt.

2.3.1 Reynoldsmittelung

Ingenieure verstehen unter turbulentem Verhalten die zufälligen, statistischen Fluktuationen in einem Fluid, die einer mittleren Strömung überlagert sind (vgl. Abbildung 2.2). Zurückgehend auf Reynolds [Rey95] wird eine momentane Größe Φ aufgespalten in einen zeitlich gemittelten Anteil ϕ und einen Schwankungsanteil ϕ'

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t), \quad (2.13)$$

wobei der zeitlich gemittelte Anteil durch die Mittelungsvorschrift

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \overline{\Phi(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(\mathbf{x}, t^*) dt^* \quad (2.14)$$

gegeben ist. Diese Definition setzt eine klare Trennung zwischen mittlerer Grundströmung und turbulenten Fluktuationen voraus, d. h. die Bedingung $T_1 \ll T \ll T_2$ sollte erfüllt sein. Dies ist bei instationären Strömungen nicht immer der Fall und führt zum sogenannten Separationsproblem (engl. ‘spectral gap problem’). Wenn die Existenz einer spektralen Lücke zwischen den Skalen der turbulenten Schwankungsbewegung und den Skalen der transienten Grundströmung nicht gewährleistet ist, verlässt

man strenggenommen den Gültigkeitsbereich der statistischen Turbulenzmodellierung. Dieser Aspekt wird bei der Interpretation von numerischen Ergebnissen häufig nicht berücksichtigt [Eul00]. Rung [Run00] empfiehlt die folgende Näherung

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \gamma \frac{(Re)^{\frac{1}{5}}}{St}, \quad \text{mit} \quad St = \frac{fL}{U_\infty} = \frac{L}{U_\infty T_2}, \quad (2.15)$$

Wandgrenzschicht: $\gamma \in [1, 10]$ freie Scherschicht: $\gamma \in [0.1, 1]$,

für eine Abschätzung der spektralen Lücke. Für eine weiterführende Diskussion dieser speziellen Problematik siehe [Eul00].

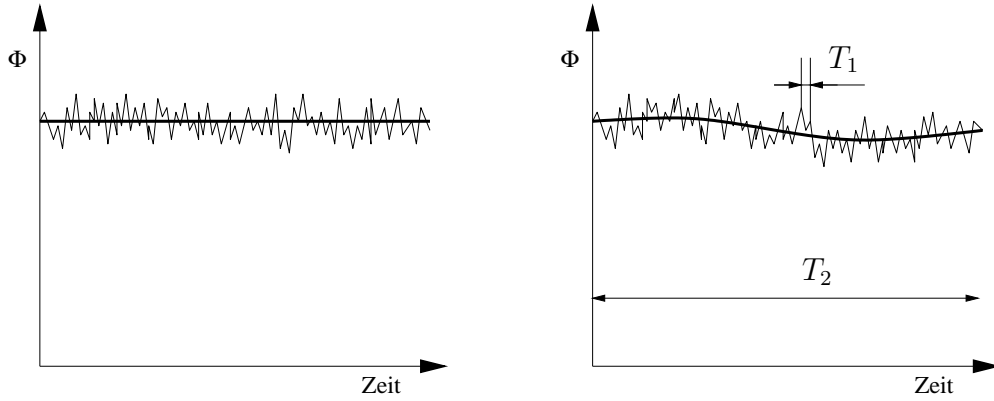


Abbildung 2.2: *Turbulente Strömung mit stationärem Mittelwert (links) und mit langwellig schwankendem Mittelwert (rechts)*

Da sich die für praktische Anwendungen relevanten Informationen in der Regel aus den gemittelten Größen ableiten lassen, bedarf es nicht der vollständigen Kenntnis der mit stochastischen Schwankungen behafteten Momentanwerte. Vor diesem Hintergrund werden die Kontinuitätsgleichung 2.11 und die Navier-Stokes'sche Gleichung 2.12 einer Mittelung gemäß Gleichung 2.14 unterzogen und dadurch in Bilanzgleichungen für die gemittelten Größen \mathbf{u} und p überführt:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{u}_r dV = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \mathbf{u} dV + \int_V \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}_r \mathbf{u}) dV = \int_V \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) - \varrho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) dV - \int_V \nabla \cdot p \delta dV. \quad (2.17)$$

Alle linear auftretenden Fluktuationsterme verschwinden bei der Mittelung. Lediglich der quadratischen Term $\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$, der aus dem nichtlinearen Konvektionsterm herrührt, bleibt als zusätzlicher Term übrig. Da die turbulenten Schwankungen im zeitlichen Mittel als eine Scheinspannung wirken, wird dieser Term als Reynoldsspannungstensor

bezeichnet. Durch die Mittelung sind demnach neue Unbekannte, die Komponenten des Reynoldsspannungstensors, erzeugt worden. Ihre Verknüpfung mit den mittleren Strömungsgrößen durch weitere, noch einzuführende Gleichungen, mit dem Ziel das Gleichungssystem zu schließen, ist Aufgabe des Turbulenzmodells.

2.3.2 Wirbelzähigkeitsmodelle

In der vorliegenden Arbeit kommen Wirbelzähigkeitsmodelle zum Einsatz. Sie zeichnen sich durch ein günstiges Verhältnis zwischen Rechenaufwand und Qualität der erzielbaren Ergebnisse aus. Vor diesem Hintergrund erfreuen sie sich vor allem im Kontext industrieller Anwendungen großer Popularität. Den Wirbelzähigkeitsmodellen liegt ein Postulat von Boussinesq [Bou77] zu Grunde, wonach sich die turbulenten Zusatzspannungen in Analogie zum Newton'schen Schubspannungsansatz durch den Geschwindigkeitsgradienten ausdrücken lassen

$$-\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \nu_t(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) - \frac{2}{3}k\boldsymbol{\delta}. \quad (2.18)$$

Neben der spezifischen turbulenten kinetischen Energie k , die proportional zur Spur des Reynoldsspannungstensors ist,

$$k := \frac{1}{2}\overline{u'_\alpha u'^\alpha}, \quad (2.19)$$

wird dabei die kinematische turbulente Viskosität ν_t eingeführt. Sie hat dieselbe Dimension wie die kinematische Viskosität ν , ist aber keine Materialkonstante, sondern eine Funktion der lokalen Turbulenzstruktur der Strömung. Während es sich für den erste Term im Boussinesq'schen Ansatz anbietet, ihn mit dem gleichartigen Term in Gleichung 2.17 durch Einführung einer effektiven Viskosität $\nu_e = \nu + \nu_t$ zusammenzufassen, wird der isotrope Anteil dem Druckterm zugeschlagen. Der Boussinesq'sche Ansatz allein stellt allerdings insofern noch keinen großen Fortschritt dar, als er nur die unbekannten Komponenten des Reynoldsspannungstensors durch neue unbekannte Größen ersetzt. Man ergänzt ihn deshalb durch die zusätzliche Annahme, dass die turbulente Viskosität nicht von den mittleren Strömungsgrößen, sondern nur von anderen für die Turbulenzstruktur charakteristische Größen explizit abhängt [SK80]. Unter dieser Voraussetzung kann mit Hilfe der Dimensionsanalyse gezeigt werden, dass die turbulente Viskosität proportional zu den charakteristischen Längen- und Geschwindigkeitsmaßen L_t und V_t der Turbulenzbewegung ist

$$\nu_t \sim L_t V_t. \quad (2.20)$$

Man unterscheidet nun algebraische, Eingleichungs- und Zweigleichungsmodelle abhängig davon, wieviele zusätzliche partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der charakteristischen Turbulenzgrößen berücksichtigt werden. Algebraische Modelle und Eingleichungsmodelle weisen nur einen sehr eingeschränkten Gültigkeitsbereich auf. Sie werden aber, vor allem aufgrund ihrer numerischen Robustheit, trotzdem

häufig eingesetzt. Die Zweigleichungsmodelle haben im Vergleich dazu einen höheren Rechenzeitbedarf, sie sind den beiden anderen Modellen dafür aber konzeptionell überlegen und werden in diesem Zusammenhang auch als *vollständige* Modelle bezeichnet [Wil93].

Ein natürliches turbulentes Geschwindigkeitsmaß ist die Wurzel der spezifischen turbulenten kinetischen Energie \sqrt{k} . Die Wahl einer geeigneten Variablen für das turbulente Längenmaß ist weniger offensichtlich. Beim weit verbreiteten $k - \omega$ Modell wird anstelle des Längenmaßes die spezifische Dissipationsrate von k verwendet. Das $k - \omega$ Modell zeichnet sich durch inhärente Konsistenz zu den Gesetzmäßigkeiten des semi-viskosen und voll-turbulenten logarithmischen Bereichs der Wandgrenzschicht aus [Wil93]. Es liefert ohne spezifische Anpassungen der Modellkonstanten für eine Vielzahl von Strömungen Ergebnisse, die mit experimentellen Daten sehr gut übereinstimmen und erweist sich auch in dieser Hinsicht anderen Zweigleichungsmodellen überlegen [Run00]. Die Bilanzgleichungen für die Turbulenzgrößen k und ω können aus der Navier-Stokes'schen Gleichung durch Bildung höherer statistischer Momente abgeleitet werden [Wil93]. Die unbekannten Geschwindigkeits- und Druckkorrelationen werden dabei auf der Grundlage von Modellannahmen durch Gradienten der gemittelten Geschwindigkeiten bzw. durch die Turbulenzgrößen selbst ausgedrückt. Auf diese Weise gelangt man zu den folgenden Integrodifferentialgleichungen, welche sowohl das Standard $k - \omega$ Model von Wilcox [Wil88] als auch das LLR $k - \omega$ Model von Rung [RT96, Run98] beschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho k dV + \int_V \nabla \cdot (\varrho k \mathbf{u}_r) dV = \\ \int_V \nabla \cdot (\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k dV + \int_V (G_t - C_k \varrho k \omega) dV \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\text{mit} \quad G_t = \mu_t S^2, \quad S = \sqrt{2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \omega dV + \int_V \nabla \cdot (\varrho \omega \mathbf{u}_r) dV = \\ \int_V \nabla \cdot (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega dV + \int_V \left(\frac{\omega}{k} C_{\omega 1} G_t - C_{\omega 2} \varrho \omega^2 \right) dV. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Diese beiden Gleichungen sind nicht nur untereinander, sondern auch durch die turbulente Viskosität

$$\mu_t = \varrho C_\mu \frac{k}{\omega}, \quad (2.23)$$

mit der gemittelten Navier-Stokes'schen Gleichung gekoppelt. Die Konstanten C_μ , σ_k , σ_ω , C_k , $C_{\omega 1}$ und $C_{\omega 2}$ sind empirisch festgelegt bzw. für einfache Strömungen analytisch

ermittelt und für allgemeingültig erklärt. Wilcox verwendet

$$C_\mu = 1, \quad \sigma_k = 1/2, \quad \sigma_\omega = 1/2, \quad C_k = 9/100, \quad C_{\omega 1} = 5/9, \quad C_{\omega 2} = 3/40. \quad (2.24)$$

Das LLR $k - \omega$ Modell stellt eine Weiterentwicklung des Wilcox-Modells dar. Bei ihm ist der Proportionalitätsfaktor C_μ nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Geschwindigkeitsgradienten. Hierdurch erweitert sich der Gültigkeitsbereich des Basismodells. Ein wesentlicher Vorteil dieser etwas komplexeren Formulierung ist z. B., dass die exzessive Produktion turbulenter kinetischer Energie im Staupunktbereich, welche für andere Zweigleichungsmodelle typisch ist, vermieden wird. Das LLR-Modell unterscheidet sich vom Wilcox-Modell durch die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} C_\mu &= \frac{f_\mu}{4 + 2.12\tilde{U}}, \quad f_\mu = \frac{1/80 + R_\mu}{1 + R_\mu}, \quad \tilde{U} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{(S^2 + W^2)}{2}}, \\ W &= \sqrt{2\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla), \\ R_\mu &= \left(\frac{R_t}{70}\right)^\alpha, \quad \alpha = 0.5 + 1.6(3\beta^2 - 2\beta^3), \quad \beta = \min \left[1, \max \left(0, \frac{R_t}{150}\right)\right], \\ R_t &= \frac{\rho k}{\mu \omega}, \quad f_1 = \frac{1/90 + (R_t/70)^2}{1 + (R_t/70)^2}, \quad c_1 = \max \left[0.43, \frac{S/\omega}{S/\omega + 4.265}\right], \\ R_k &= A^*(R_t/100)^{2.5} + (1 - A^*)(R_t/100)^{0.5}, \quad A^* = \tanh(4\sqrt{R_t/100}), \\ C_k &= \frac{\frac{0.83}{3} + R_k}{1 + R_k}, \quad C_{\omega 1} = \frac{f_1}{\sqrt{C_\mu}} \left[c_1 - \frac{C_\mu S}{\omega}\right], \quad C_{\omega 2} = \frac{1.83}{1 + \sqrt{\frac{C_\mu \mu}{(\mu + \mu_t)}}} - 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Als Nachteil gegenüber dem $k - \varepsilon$ Modell wird die Sensitivität der ω -Gleichung gegenüber den Fernfeld- und Einströmrandbedingungen angesehen [Men92]. Diese Überempfindlichkeit kann jedoch durch eine physikalisch bzw. mathematisch motivierte Limitierung vermieden werden. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz [BSMM95], hier formuliert für die doppelte Überschiebung des Reynoldsspannungstensors,

$$\overline{u'_\alpha u^{\alpha'}} \overline{u'_\beta u^{\beta'}} \geq \overline{u'_\alpha u'_\beta} \overline{u^{\alpha'} u^{\beta'}}, \quad (2.26)$$

liefert eine wichtige Zwangsbedingung für ω . Wie sich unter Berücksichtigung der Gleichung 2.18 leicht zeigen lässt [ZL95, Run98], folgt daraus

$$\omega \geq C_\mu \frac{\sqrt{3}}{2} S. \quad (2.27)$$

3 Numerik

Die in Kapitel 2 eingeführten Grundgleichungen stellen ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen dar¹, welches sich aufgrund seiner Komplexität im allgemeinen einer analytischen Lösung verschließt und deshalb numerisch gelöst werden muss. Neben der Güte des Turbulenzmodells bestimmen vor allem die numerischen Approximationen die Qualität der Ergebnisse einer Berechnung. Die Diskretisierung der Gleichungen wird aus diesem Grunde nachfolgend ausführlich diskutiert. Eine nahezu vollständige Darstellung dieser Thematik bieten die Monographien von Hirsch [Hir92a, Hir92b].

3.1 Allgemeine Diskretisierungsverfahren

Die näherungsweise Lösung der Grundgleichungen erfordert eine Diskretisierung sowohl des Berechnungsgebiets als auch der Gleichungen selbst. Dabei werden die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls und die Turbulenzgrößen durch geeignete Approximationen in ein algebraisches Gleichungssystem überführt. Dieses kann dann, in einem zweiten Schritt, mittels eines numerischen Verfahrens gelöst werden. Der Ausgangspunkt der Diskretisierung ist die Aufteilung des betrachteten Gebiets in Teilvolumen (üblicherweise als “Zellen” bezeichnet), deren Kanten das sogenannte Rechengitter oder -netz bilden. Mit den Gitterzellen sind Punkte assoziiert (z. B. die Ecken oder Mittelpunkte der Volumen), für die die numerischen Werte der Unbekannten gesucht werden. Zur Diskretisierung der Bilanzgleichungen haben sich Finite-Differenzen-, Finite-Elemente- und Finite-Volumen-Methoden weitestgehend durchgesetzt. Die Finite-Differenzen-Methode ist das klassische Verfahren der numerischen Strömungsmechanik und immer noch weitverbreitet. Als ihr Hauptnachteil muss die mangelnde Flexibilität hinsichtlich der Diskretisierung komplizierter Geometrien angesehen werden, was dazu geführt hat, dass mittlerweile die Finite-Elemente-Methode (FEM) und vor allem die Finite-Volumen-Methode (FVM) dieses Anwendungsgebiet dominieren. Der FEM liegt eine sehr weitentwickelte mathematische Theorie zu Grunde, die sie vor allem für elliptische Probleme prädestiniert erscheinen lässt. In der numerischen Strömungsmechanik treten aber vor allem hyperbolische bzw. hy-

¹Diese Aussage bezieht sich genau genommen auf die differentielle Form der Grundgleichungen, welche aber — hinreichende Glätte der Feldgrößen vorausgesetzt — äquivalent zur integralen Form ist.

bride Probleme auf. Dafür hat sich die FVM bestens bewährt. Sie wird deshalb auch in dieser Arbeit verwendet. Die FVM zeichnet sich gegenüber der FEM vor allem durch eine inhärent konservative Approximation aus. Die diskreten Gleichungen spiegeln dabei eine wesentliche physikalische Eigenschaft der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen wider. Wie der nächste Abschnitt zeigen wird, kann gar nicht genug betont werden, wie wichtig es ist, dass die diskrete Problemstellung dieselbe mathematisch-physikalische Struktur aufweist wie die kontinuierliche Problemstellung.

3.2 Ein illustratives Beispiel

Das in diesem Abschnitt diskutierte Konvektions-Diffusions-Problem stellt einen einfachen Sonderfall der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen dar, für den eine analytische Lösung angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} -\epsilon \Phi_{,xx} + \Phi_{,x} &= 0, & \Phi &\in [0, 1], \\ \Phi(0) &= 1, & \Phi(1) &= 0 \end{aligned} \quad \implies \quad \Phi(x, \epsilon) = \frac{e^{x/\epsilon} - e^{1/\epsilon}}{1 - e^{1/\epsilon}}. \quad (3.1)$$

Für sehr kleine ϵ gehört dieses Randwertproblem zur Klasse der singular gestörten Probleme. Hierunter versteht man Differentialgleichungen, deren Term der höchsten Ableitung einen Koeffizienten $\epsilon \ll 1$ hat und sich der Typ der Differentialgleichung ändert, wenn $\epsilon = 0$ gesetzt wird [RST96]. Die Lösung eines singular gestörten Problems stimmt bis auf eng begrenzte Gebiete, den Grenzschichten, mit der Lösung des sogenannten reduzierten Problems überein. Dieses ergibt sich, wenn man ϵ gegen Null gehen lässt und die Randbedingungen an den veränderten Typ der Differentialgleichung anpasst. Der Verlauf von Φ für $\epsilon = 2,5 \cdot 10^{-3}$ ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Für das Konvektions-Diffusions-Problem soll mittels eines Standard-Verfahrens auch eine numerische Lösung ermittelt werden. Dazu wird das Intervall $[0, 1]$ in N gleich

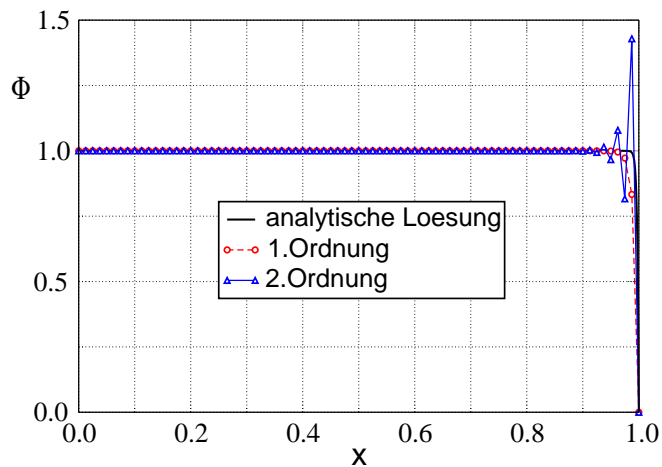


Abbildung 3.1: Vergleich von numerischen Lösungen des Konvektions-Diffusions-Problems mit der analytischen Lösung für $\epsilon = 2,5 \cdot 10^{-3}$ und $N = 80$

große Teilintervalle aufgeteilt und die Ableitungsterme durch zweiter Ordnung genaue Zentralkdifferenzen approximiert. Das hieraus resultierende tridiagonale Gleichungssystem kann so umgeformt werden, dass sich eine explizite Lösung für die diskreten Werte Φ_i ergibt:

$$\begin{aligned} -\epsilon \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2} - \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h} &= 0 \quad \forall i = 1, N-1 \\ \Phi_0 &= 1, \quad \Phi_N = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Phi_i &= \frac{q^i - q^N}{1 - q^N}, \\ q &= \frac{2\epsilon + h}{2\epsilon - h}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Verlauf dieser Φ_i ist für eine relativ feine Aufteilung von $N = 80$ in Abbildung 3.1 dargestellt. Während die numerische Lösung fast überall mit der analytischen Lösung übereinstimmt, treten am rechten Rand unvermittelt sehr starke Oszillationen auf. Sie haben ihre Ursache in den alternierenden q^i . Die numerische Lösung ist folglich frei von Oszillationen, wenn die Schrittweite der Bedingung $h < 2\epsilon$ genügt, da in diesem Fall q positiv ist. Wird der Term der ersten Ableitung mit einer nur erster Ordnung genauen aufwärtsgerichteten Differenzenformel approximiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} -\epsilon \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2} - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h} &= 0 \quad \forall i = 1, N-1 \\ \Phi_0 &= 1, \quad \Phi_N = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Phi_i &= \frac{q^i - q^N}{1 - q^N}, \\ q &= \frac{\epsilon + h}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Diese Approximation liefert offensichtlich unabhängig von der gewählten Schrittweite eine oszillationsfreie Lösung. Sie beruht jedoch auf einem wenig genauen Verfahren und weicht deshalb dort, wo die Funktion $\Phi(x)$ nicht glatt verläuft, stark von der richtigen Lösung ab (vgl. Abbildung 3.1).

Bei den strömungsmechanischen Bilanzgleichungen aus Kapitel 2 ist $\epsilon = Re^{-1}$. Der Diffusionsterm definiert den Typ der Gleichungen (elliptisch im Raum) und legt damit fest, welche Randbedingungen vorgegeben werden müssen, um ein sachgemäß gestelltes Problem zu erhalten. Der dominante Konvektionsterm bewirkt im Gegensatz dazu, dass Informationen auch und vor allem entlang der sogenannten Subcharakteristiken (den Bahnlinien) verbreitet werden [Wan71, Tel81]. Das obige Beispiel hat deutlich gemacht, dass bei den großen Reynoldszahlen, welche für praxisrelevante Problemstellungen typisch sind, Zentralkdifferenzen zur Diskretisierung des Konvektionsterms völlig ungeeignet sind, da sie den zu Grunde liegenden strömungsphysikalischen Phänomen in keinsten Weise Rechnung tragen. Einfache aufwärtsgerichtete Differenzenformeln bieten hierzu allerdings auch keine befriedigende Alternative. Sie werden zwar in einigen kommerziellen Softwarepaketen (vgl. [Fre95]) aufgrund ihrer stabilisierenden Wirkung optional angeboten und von vielen Anwendern auch eingesetzt; eine zunehmende Zahl von wissenschaftlichen Fachzeitschriften verweigert aber die Annahme von Ergebnissen, welche auf Verfahren basieren, die nur erster Ordnung genau sind [Fre93]. Im nachfolgenden Abschnitt wird die Diskretisierung der einzelnen Terme der Bilanzgleichungen diskutiert und dabei auch Approximationen für den Konvektionsterm vorgestellt, die sich besser bewährt haben.

3.3 Diskretisierung

Das betrachtete Gebiet wird durch ein Rechengitter dargestellt. Die Abbildung der Gitterzellen auf Einheitsquadrate ($\Delta\xi = \Delta\eta = 1$) in der Rechenebene definiert die in Abschnitt 2.1 eingeführte Variablentransformation. An die Stelle der Feldgrößen \mathbf{u} , p , k und ω treten diskrete Variablen, welche den Zellmittelpunkten zugeordnet sind. Um eine streng konservative Formulierung der Bilanzgleichungen zu gewährleisten, werden alle Vektoren und Tensoren auf eine räumlich invariante, kartesische Basis bezogen [Sch90]. Die Diskretisierung wird mit dem Ziel durchgeführt, ein algebraisches Gleichungssystem mit einer block-pentadiagonalen Koeffizientenmatrix zu erhalten, welches mit einem semi-impliziten, iterativen Verfahren gelöst werden kann. In den nachfolgenden Gleichungen sind die Platzhalter Φ und Γ gemäß Tabelle 3.1 zu substituieren.

Tabelle 3.1: *Substitutionen für die Platzhalter Φ und Γ*

	Φ	Γ
Impulsgleichung	\mathbf{u}	μ_e
k -Gleichung	k	$\mu + \sigma_k \mu_t$
ω -Gleichung	ω	$\mu + \sigma_\omega \mu_t$

3.3.1 Zeitliche Diskretisierung

Die Bilanzgleichungen 2.17, 2.21 und 2.22 beinhalten jeweils einen instationären Term. Das entsprechende Integral wird für jede Zelle mit Hilfe der Mittelpunkregel approximiert durch Größen, die mit dem Zellmittelpunkt P assoziiert sind,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho \Phi dV = \iint_{\eta \xi} \frac{\partial J \varrho \Phi}{\partial \tau} d\xi d\eta \approx \left(\frac{\partial J \varrho \Phi}{\partial \tau} \right)_P. \quad (3.4)$$

Die Jacobi-Determinante J kann dabei auch durch das Zellvolumen V_P ersetzt werden. Die Bilanzgleichungen sind parabolisch in der Zeit, d. h. die Lösung zu einem bestimmten Zeitpunkt wird nur von dem Strömungszustand zu den vorhergehenden Zeitpunkten beeinflusst. Das wegen seiner Einfachheit häufig verwendete Euler-Verfahren greift nur auf eine zurückliegende Zeitebene zurück,

$$\left(\frac{\partial J \varrho \Phi}{\partial \tau} \right)_P^n \approx \frac{\varrho (V_P \Phi_P)^n - \varrho (V_P \Phi_P)^{n-1}}{\Delta \tau}. \quad (3.5)$$

Werden die anderen Terme, wie hier der Fall, zum Zeitpunkt τ^n ausgewertet, so ist das Verfahren implizit. Mit Hilfe eines rückwärtsgerichteten Differenzenquotienten, der

sich auf zwei zurückliegende Zeitebenen stützt, ist auch eine zeitliche Approximation zweiter Ordnung möglich,

$$\left(\frac{\partial J \varrho \Phi}{\partial \tau}\right)_P^n \approx \frac{3\varrho(V_P \Phi_P)^n - 4\varrho(V_P \Phi_P)^{n-1} + \varrho(V_P \Phi_P)^{n-2}}{2\Delta\tau}. \quad (3.6)$$

Für diese genauere Approximation ist auch die Bezeichnung BDF-Verfahren zweiter Ordnung gebräuchlich. Ihr einziger Nachteil ist der etwas größere Speicherplatzbedarf aufgrund der zusätzlichen Zeitebene. Sowohl das Euler- als auch das BDF-Verfahren sind L-stabil und somit zur Lösung steifer Differentialgleichungssysteme geeignet [Roo99]. Im Folgenden wird der Index n zur Vereinfachung der Schreibweise zumeist weggelassen.

3.3.2 Diffusionsterm

Um eine konservative Diskretisierung zu gewährleisten, wird der Diffusionsterm in der Regel mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral umgewandelt. Alternativ dazu kann auch das Volumenintegral in Verbindung mit der konservativen Form des Divergenzoperators [Sch90] als Ausgangspunkt der Diskretisierung dienen. Mit dem in Abbildung 3.2a schraffiert dargestellten Kontrollvolumen als Integrationsgebiet ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV &= \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{1}{J} (\Gamma J g^{\alpha\beta} \Phi_{,\xi\beta})_{,\xi\alpha} J d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta} \int_{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J \Gamma g^{1\beta} \Phi_{,\xi\beta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \Gamma g^{2\beta} \Phi_{,\xi\beta}) \right] d\xi d\eta \\ &= \int_{\eta} (J \Gamma g^{1\beta} \Phi_{,\xi\beta}) \Big|_w^e d\eta + \int_{\xi} (J \Gamma g^{2\beta} \Phi_{,\xi\beta}) \Big|_s^n d\xi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hierbei bezeichnet $g^{\alpha\beta}$ die kontravarianten Metrikkoeffizienten (siehe Anhang A). Um die Integration formal durchführen zu können, muss eine Annahme bezüglich der Abhängigkeit der Integranden von den Integrationsvariablen getroffen werden. Mit der Mittelpunktregel erhält man:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) dV &\approx (J \Gamma g^{1\beta} \Phi_{,\xi\beta}) \Big|_w^e + (J \Gamma g^{2\beta} \Phi_{,\xi\beta}) \Big|_s^n \\ &\approx \underbrace{\left[\frac{\Gamma}{J} (x_\eta^2 + y_\eta^2) \Phi_\xi \right] \Big|_w^e + \left[\frac{\Gamma}{J} (x_\xi^2 + y_\xi^2) \Phi_\eta \right] \Big|_s^n}_{\text{Normaldiffusion}} \\ &\quad - \underbrace{\left[\frac{\Gamma}{J} (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \Phi_\eta \right] \Big|_w^e - \left[\frac{\Gamma}{J} (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \Phi_\xi \right] \Big|_s^n}_{\text{Kreuzdiffusion}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

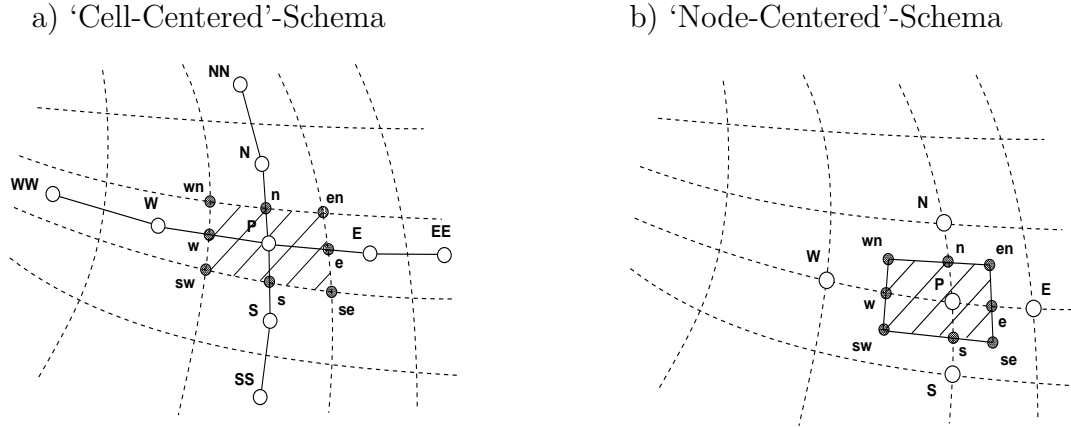


Abbildung 3.2: Differenzenmoleküle mit Kompass-Notation² zur Auswertung von räumlichen Differentialoperatoren bei Strömungsberechnung (mit ‘Cell-Centered’-Schema) und Gitternachführung (mit ‘Node-Centered’-Schema)

Die Ableitungen $\Phi_{\xi\beta}$ werden durch zentrale Differenzen approximiert. Für die Ostseite der Zelle gilt damit z. B.

$$\begin{aligned} (\Phi_{\xi})_e &\approx \Phi_E - \Phi_P, \\ (\Phi_{\eta})_e &\approx \Phi_{en} - \Phi_{se}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Größen in den Zellecken (Φ_{en} , Φ_{se} , etc.) werden durch einfache bilineare Interpolation auf zellzentrierte Werte zurückgeführt, da nur diese in den diskreten Gleichungen als Unbekannte auftreten dürfen. Die ersten beiden Terme der rechten Seite von Gleichung 3.8 stellen den Normaldiffusions-Anteil dar. Sie werden bei der Diskretisierung implizit behandelt, da sie positive Beiträge zu den Hauptdiagonalelementen der Koeffizientenmatrix des algebraischen Gleichungssystems liefern. Die anderen Terme bezeichnet man im Gegensatz dazu als Kreuzdiffusions-Anteil. Sie treten nur bei nichtorthogonalen Gittern auf. Der Kreuzdiffusions-Anteil führt bei der Diskretisierung zu negativen Beiträgen zu den Hauptdiagonalelementen, die umso größer sind, je stumpfer der Winkel ist unter dem die Gitterlinien zueinander verlaufen. Aus diesem Grunde wird der Kreuzdiffusions-Anteil explizit behandelt.

3.3.3 Konvektionsterm

Wie der Abschnitt 3.2 deutlich gemacht hat, bereitet die Diskretisierung des Konvektionsterms weitaus mehr Probleme als die des Diffusionsterms. Der erste Diskretisie-

²Bei der Kompass-Notation ist die Bezeichnung der Nachbarpunkte zu Punkt P von den Himmelsrichtungen (‘West’, ‘East’, ‘South’, ‘North’ für Zellmittelpunkte und entsprechende Kleinbuchstaben für die Mittelpunkte der Seitenflächen) abgeleitet.

rungsschritt verläuft noch analog zu dem des Diffusionsterms,

$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}_r \Phi) dV &= \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{1}{J} (\varrho J u_r^{(\alpha)} \beta_{\alpha}^{\beta} \Phi)_{,\xi\beta} J d\xi d\eta \\
 &= \int_{\eta} \int_{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\varrho A_{\alpha 1} u_r^{(\alpha)} \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\varrho A_{\alpha 2} u_r^{(\alpha)} \Phi) \right] d\xi d\eta \\
 &= \int_{\eta} (\varrho A_{\alpha 1} u_r^{(\alpha)} \Phi) \Big|_w^e d\eta + \int_{\xi} (\varrho A_{\alpha 2} u_r^{(\alpha)} \Phi) \Big|_s^n d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Elemente der Inversen der Jacobi-Matrix, β_{α}^{β} , und Adjunkten der Jacobi-Matrix, $A_{\alpha\beta}$, stellen rein geometrische Faktoren dar. Sie sind im Anhang A aufgeführt. Die Integrale der obigen Gleichung lassen sich mit Hilfe der Mittelpunktregel approximieren gemäß

$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}_r \Phi) dV &\approx (\varrho A_{\alpha 1} u_r^{(\alpha)} \Phi) \Big|_w^e + (\varrho A_{\alpha 2} u_r^{(\alpha)} \Phi) \Big|_s^n \\
 &\approx (\dot{m}\Phi)_e - (\dot{m}\Phi)_w + (\dot{m}\Phi)_n - (\dot{m}\Phi)_s.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Der Massenfluss \dot{m} ist verantwortlich für den Transport der Größe Φ aus dem Innern des Kontrollvolumens heraus. Anders als beim Diffusionsterm werden in der Bilanz der konvektiven Flüsse die Größen \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{x}}$ und Φ an den Kontrollvolumen-Seiten benötigt.

Variablenbestimmung an den Seitenflächen des Kontrollvolumens

Die in der Abbildung 3.2a mit P , E , W , N , S , EE , WW , NN und SS bezeichneten Punkte bilden das Differenzenmolekül, welches zur Approximation der Variablen Φ an den Seitenflächen e , w , n und s verwendet wird. Die Herleitung einer geeigneten Interpolationsvorschrift kann, bei hinreichender Glätte der Variablen, mittels einer einfachen Taylorreihenentwicklung erfolgen. Die Raumdimensionen werden dabei im Allgemeinen unabhängig voneinander betrachtet. Bezeichnet man, wie in der Abbildung 3.3 dargestellt, die stromauf liegende Zelle mit U ('upstream'), die zentrale Zelle mit C ('central') und die stromab liegende Zelle mit D ('downstream'), so ergibt sich der Variablenwert an der Zellgrenzfläche f ('face') zu:

$$\Phi_f = \Phi_C + \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \Phi_{,x}|_C + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \Phi_{,xx}|_C + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \Phi_{,xxx}|_C + \dots \tag{3.12}$$

Beim Upwind-Ansatz (UDS) wird von einem zellweise konstanten Funktionsverlauf ausgegangen (siehe Abbildung 3.3a). Die Ableitungsterme in der Taylorreihe verschwinden in diesem Fall, was zu einer Genauigkeit $\mathcal{O}(\Delta x)$ führt. Eine zweiter Ordnung genaue Interpolation ergibt sich, wenn in der Taylorreihe die erste Ableitung durch eine um f zentrierte Differenzenformel angenähert wird. Dieses als Zentralknoten-Ansatz (CDS) bezeichnete Schema erfüllt zwar die Anforderungen hinsichtlich der

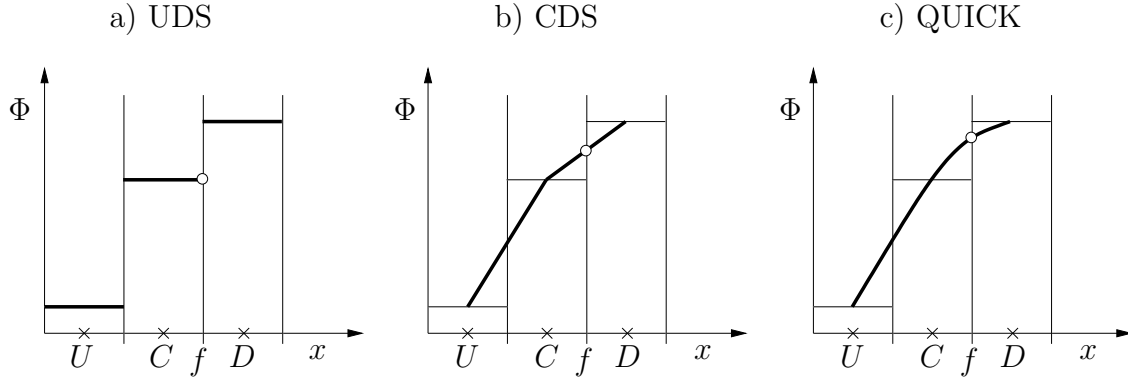


Abbildung 3.3: Variableninterpolation auf der Basis von konstanten, linearen und quadratischen Funktionsverläufen

formalen Genauigkeit der Approximation, es ist aber trotzdem ungeeignet, da es bei hohen Reynoldszahlen zu unphysikalischen Oszillationen in der Lösung führt (vgl. Abschnitt 3.2). Mit dem QUICK-Ansatz von Leonard [Leo79] lässt sich eine noch höhere Genauigkeitsordnung erzielen. Er stützt sich bei der Interpolation auf zwei stromauf und einen stromab liegenden Punkt und ist damit in der Lage, quadratische Funktionsverläufe exakt darzustellen. Der wesentliche Vorteil gegenüber dem CDS liegt vor allem in der stärkeren Gewichtung der stromauf liegenden Punkte begründet. Der QUICK-Ansatz kann ebenfalls Oszillationen hervorrufen, da ein stromab liegender Punkt in die Interpolationsvorschrift mit eingeht. Umfangreiche Erfahrungen mit praktischen Anwendungen belegen, dass der QUICK-Ansatz zu wesentlich besseren Ergebnissen führt als das UDS oder das CDS [Nol93]. QUICK-Ansatz und CDS lassen sich, gemeinsam mit anderen Schemata höherer Ordnung, in der folgenden kanonischen Form zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \Phi_C + \frac{1}{4}(\kappa_+ \Delta_+ + \kappa_- \Delta_-), \\ \text{mit } \kappa_+ &= 1 + \kappa, \quad \kappa_- = 1 - \kappa, \\ \Delta_+ &= \Phi_D - \Phi_C, \quad \Delta_- = \Phi_C - \Phi_U.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Das CDS ergibt sich dabei gerade für $\kappa = 1$, während für das QUICK-Verfahren $\kappa = \frac{1}{2}$ zu setzen ist. Sinnvolle Werte für κ liegen zwischen -1 und 1 . Die untere Grenze, $\kappa = -1$, entspricht dem LUDS-Ansatz.

Der reine Upwind-Ansatz ($\Phi_f = \Phi_C$) stellt eine vergleichsweise ungenaue Approximation dar, er garantiert jedoch einen monotonen Funktionsverlauf. Der zusätzliche Term in Gleichung 3.13 verhilft der Interpolationsvorschrift zu der geforderten höheren Genauigkeit. Er führt aber leider auch dazu, dass Oszillationen in der Lösung auftreten können. Aus diesem Grund wird der Zusatzterm in der Regel beschränkt. Dies gelingt durch die axiomatische Einführung einer Limitierungsfunktion L mit den Eigenschaf-

ten

$$L(s, t) = L(t, s), \quad (\text{Symmetrie})^3 \quad (3.14a)$$

$$\gamma L(s, t) = L(\gamma s, \gamma t), \quad (\text{Linearität}) \quad (3.14b)$$

$$L(s, s) = s, \quad (\text{Konsistenz}) \quad (3.14c)$$

(vgl. [Jam95]) in Verbindung mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \Phi_f &= \Phi_C + \frac{1}{2}L(\Delta_+, \Delta_-) \\ \text{bzw. } \Phi_f &= \Phi_C + \frac{1}{2}\Delta_+L(1, r) \quad \text{mit } r = \frac{\Delta_-}{\Delta_+}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ein monotoner Funktionsverlauf ist gewährleistet, wenn bei monoton steigenden Φ_U , Φ_C , Φ_D die Bedingungen $\Phi_C \leq \Phi_f \leq \Phi_D$ erfüllt sind und bei monoton fallenden Φ_U , Φ_C , Φ_D entsprechend $\Phi_C \geq \Phi_f \geq \Phi_D$ gilt. In beiden Fällen findet man:

$$0 \leq L(1, r) \leq 2. \quad (3.16)$$

Bei nicht-monotonen Folgen Φ_U , Φ_C , Φ_D sowie in den Extremsituationen $r \ll 1$ und $r \gg 1$ verliert der Begriff der Fehlerordnung an Bedeutung, da die Schrittweite zu groß ist. Leonard [Leo88] wies in diesem Zusammenhang die Existenz oszillierender Moden für bestimmte, kritische $r < 0$ nach, welche bei Verwendung der unlimitierten Schemata nicht unterdrückt werden. Er zog daraus die Schlussfolgerung, dass neben 3.16 auch die Bedingung

$$L(1, r) = 0 \quad \text{wenn } r \leq 0 \quad (3.17)$$

erfüllt sein sollte. Für eine ausführliche Diskussion dieser Problematik siehe [GL88]. Die Limitierungsfunktion

$$L(1, r) = \max \{0, \min [2r, (r\kappa_+ + \kappa_-)/2, (\kappa_+ + r\kappa_-)/2, 2]\} \quad (3.18)$$

genügt den Axiomen 3.14a-c sowie den Zwangsbedingungen 3.16 und 3.17, bei weitestgehender Berücksichtigung der kanonischen Form 3.13. Für den limitierten QUICK-Ansatz ist die von Lien und Leschziner [LL94b] geprägte Bezeichnung UMIST gebräuchlich. Die gemäß Gleichung 3.18 zulässige Region ist in der Abbildung 3.4 schraffiert dargestellt.

Die bei der Herleitung des Konvektionsschemas gemachten Aussagen zur Fehlerordnung gelten strenggenommen nur für Rechengitter mit äquidistanter Schrittweite. Die Rechengitter, welche bei praxisrelevanten Problemstellungen zum Einsatz kommen, weisen jedoch im Allgemeinen eine Schrittweite auf, die von Zelle zu Zelle variiert. Einer Untersuchung von Castro und Jones [CJ87] zufolge ist der dadurch hervorgerufene,

³Die Symmetrie-Bedingung bewirkt, dass die abwärtsgerichtete Differenz Δ_+ und die aufwärtsgerichtete Differenz Δ_- gleich behandelt werden. Es gibt auch Ansätze, welche keine Symmetrie voraussetzen (z. B. [LL94a]).

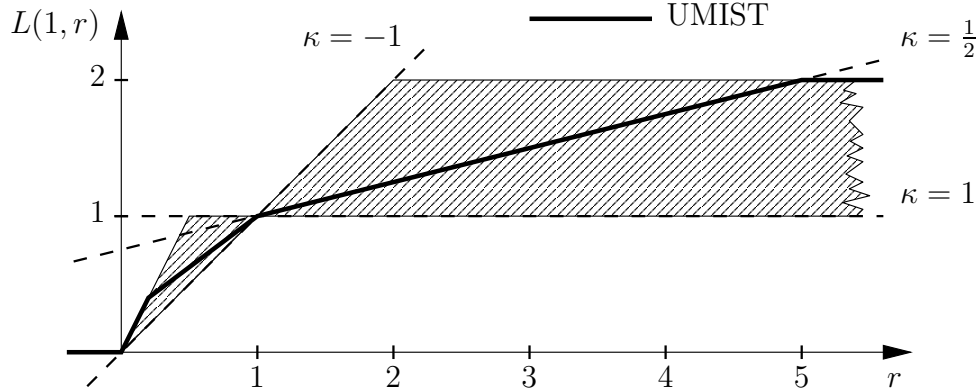


Abbildung 3.4: Limitierungsfunktion beim UMIST-Ansatz

zusätzliche Fehler jedoch vernachlässigbar, vorausgesetzt, das Verhältnis der Abmessungen benachbarter Gitterzellen liegt zwischen 0,8 und 1,25.

Die hier vorgestellte Limitierungsfunktion ist bei weitem nicht die einzig mögliche. Einen allgemeineren theoretischen Rahmen für die Konstruktion von hochauflösenden, limitierten Schemata bieten das TVD-Konzept von Harten [Har84] und das etwas neuere LED-Konzept [Jam95]. Die Entwicklung von Schemata zur genauen und numerisch robusten Approximation des Flusses ist nach wie vor ein Gebiet intensiver Forschungsbemühungen (vgl. [DK97]).

Bestimmung der Gittergeschwindigkeit

Die Herleitung der ALE-Gleichungen (siehe Kapitel 2) hebt die Bedeutung, welche dem VCL zukommt, hervor. Es verknüpft die Gittergeschwindigkeit mit der zeitlichen Änderung des Zellvolumens. Das Zellvolumen ergibt sich für jede Zeitebene direkt aus den Gitterpunktkoordinaten. Zur Bestimmung der Gittergeschwindigkeit gibt es hingegen mehrere Möglichkeiten. Es erscheint naheliegend, sie mittels eines Finite-Differenzen-Ansatzes aus der Verschiebung der Gitterpunkte zu approximieren. Bei dieser Vorgehensweise wird jedoch das diskrete Pendant zu Gleichung 2.10 nicht erfüllt, mit der Konsequenz, dass das numerische Verfahren nicht mehr in der Lage ist, einfache, konstante Strömungszustände darzustellen [DP88]. Die Berechnung der Gittergeschwindigkeit muss deshalb konsistent zum VCL erfolgen. Am einfachsten gelingt dies, indem das VCL explizit nach der Gittergeschwindigkeit aufgelöst wird. Der Weg dazu führt über die Volumeninkremente ΔV (siehe Abbildung 3.5). Für sie gelten die einfachen geometrischen Zusammenhänge:

$$V^n = V^{n-1} + \sum_{f \in \mathcal{S}} \Delta V_f^n = V^{n-2} + \sum_{f \in \mathcal{S}} \Delta V_f^{n-1} + \sum_{f \in \mathcal{S}} \Delta V_f^n, \quad \mathcal{S} = \{e, w, n, s\}. \quad (3.19)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß lässt sich der zweite Term in Gleichung 2.10 als Oberflächenintegral darstellen,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \oint_S \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.20)$$

Die Annahme, dass $\dot{\mathbf{x}}$ entlang der Seitenflächen des Kontrollvolumens jeweils linear verläuft (Approximation zweiter Ordnung) führt zu der folgenden semi-diskreten Formulierung:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} S)_e + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} S)_w + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} S)_n + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} S)_s. \quad (3.21)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die Gittergeschwindigkeit in eine Normalkomponente und eine Tangentialkomponente aufzuspalten,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{x}^\perp \mathbf{n} + \dot{x}^\parallel \mathbf{t}. \quad (3.22)$$

Nur die Normalkomponente liefert einen Beitrag zur Bilanzgleichung 3.20. Dies gilt ebenfalls für die anderen Bilanzgleichungen aus Kapitel 2. Wird die zeitliche Ableitung in Gleichung 3.21 mit dem Euler-Verfahren approximiert, so findet man durch Vergleich mit der Gleichung 3.19 für eine Seitenfläche f :

$$\dot{x}_f^\perp = \frac{\Delta V_f^n}{S_f \Delta t}. \quad (3.23)$$

Für die genauere zeitliche Diskretisierung zweiter Ordnung (Gleichung 3.6) ergibt sich entsprechend [LMPS97, Hie99]:

$$\dot{x}_f^\perp = \frac{3\Delta V_f^n - \Delta V_f^{n-1}}{2S_f \Delta t}. \quad (3.24)$$

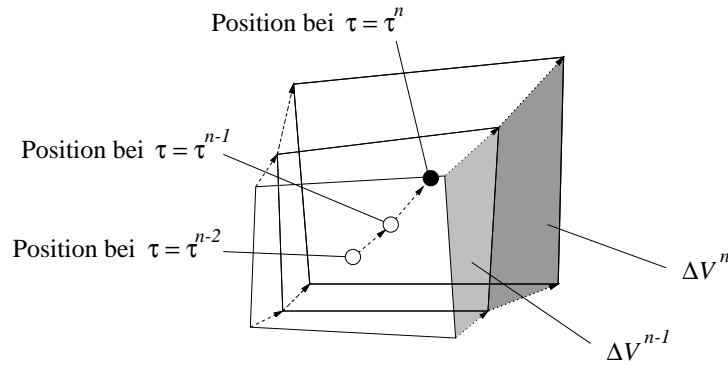


Abbildung 3.5: Volumeninkremente an der Ostseite einer Zelle

3.4 Bestimmung des Drucks

Die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen 2.16 und 2.17 enthalten keine Bestimmungsgleichung für den Druck. Während sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bei vorgegebenem Druckgradient direkt aus der Impulsbilanz ergeben, muss die Massenbilanz erst umgeformt werden, um die Berechnung des Druckes zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang werden drei verschiedene Ansätze unterschieden. Die Methode der künstlichen Kompressibilität hat sich, ebenso wie auch Methoden, die auf der Lösung einer Poisson-Gleichung für den Druck basieren, als nicht sehr effizient erwiesen [Sch90]. Aus diesem Grunde basiert der in dieser Arbeit eingesetzte Lösungsalgorithmus auf einem Druckkorrektur-Verfahren, dem SIMPLE-Verfahren von Patankar [Pat80]. Es kann, obwohl ursprünglich für eine raumfeste Diskretisierung hergeleitet, ohne weitere Modifikation auch bei zeitveränderlichen Rechengittern verwendet werden, vorausgesetzt das diskrete VCL ist erfüllt [LMPS97].

Bei inkompressiblen Strömungen geht nur der Druckgradient in die Bilanzgleichungen ein. D. h. eine beliebige, zum Druck addierte Konstante bleibt ohne Einfluss auf die anderen Variablen. Die Massenbilanz besteht nur aus der Divergenz des Geschwindigkeitsvektors und enthält damit weder den Druck noch die Geschwindigkeit selbst. Das erschwert eine korrekte numerische Behandlung der strömungsmechanischen Problemstellung. Werden nämlich die im Rahmen der Diskretisierung an den Seitenflächen der Kontrollvolumen benötigten Druck- und Geschwindigkeitswerte durch eine einfache geometrische Interpolation aus den zentral gespeicherten Werten ermittelt, so führt das zur Entkoppelung benachbarter Werte und damit zu einem schachbrettartigen Muster in der Lösung [Pat80]. Viele Jahre lang waren versetzte Rechengitter der einzige bekannte Weg zur Umgehung dieser Schwierigkeit. Dabei werden die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors nicht den Zellmittelpunkten, sondern den Mittelpunkten der Seitenflächen zugeordnet. Dies bringt jedoch eine beträchtliche Erhöhung des Rechenaufwands und der Komplexität des numerischen Verfahrens mit sich. Rhie [Rhi81] entwickelte eine spezielle Interpolation, welche im Gegensatz zur rein geometrischen Interpolation auf die diskrete Impulsbilanz zurückgreift. Durch diese Vorgehensweise, die inzwischen quasi zum Standard geworden ist, gelingt es, Entkopplungsprobleme auch bei nichtversetzten Rechengittern zu vermeiden. Die “Impulsinterpolation” ([MRZ92]) unterscheidet sich von der geometrischen Interpolation durch einen Korrekturterm, der sowohl $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ als auch proportional zur dritten Ableitung des Drucks ist [FP96] und folglich immer dann seine glättende Wirkung entfaltet, wenn benachbarte Druckwerte einen oszillierenden Verlauf aufweisen.

3.5 Implementierung der Randbedingungen

Um ein sachgemäß gestelltes Problem zu erhalten, müssen die Integrodifferentialgleichungen 2.17, 2.21 und 2.22 sowie die Druckkorrekturgleichung durch geeigneten Randbedingungen ergänzt werden. In dieser Arbeit werden feste Wände sowie Ein- und Ausströmränder als mögliche Randbedingungen betrachtet.

3.5.1 Randbedingungen für die Bilanzgleichungen

Einströmrund

Am Einströmrund sind feste Werte für die Variablen vorzugeben. Bei der Geschwindigkeit ist dies in der Regel der Wert der ungestörten Anströmung U_∞ .

Die Turbulenzgrößen am Einströmrund sind in der Regel nicht bekannt. Zumeist liegt jedoch eine grobe Abschätzung für den Turbulenzgrad Tu vor. Aus diesem kann die turbulente kinetische Energie gemäß

$$k = \frac{3}{2}(Tu U_\infty)^2 \quad (3.25)$$

bestimmt werden. Eine geeignete Randbedingung für ω zu finden ist schwieriger. Häufig wird, ausgehend von der Annahme, dass die Freistromturbulenz am Einströmrund isotrop ist, gefordert, dass

$$\frac{\mu_t}{\mu} \ll 1 \quad (3.26)$$

gilt, woraus sich mittels Gleichung 2.23 und k_∞ ein Wert für ω bestimmen lässt. Alternativ dazu kann ω auch aus dimensionsanalytischen Betrachtungen durch Vorgabe eines turbulenten Längenmaßes L_t gewonnen werden

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L_t}, \quad (3.27)$$

wobei L_t selbst wieder in Bezug zu einer für die Strömung charakteristischen Länge L gesetzt wird. Für das Verhältnis von L_t zu L wählt man üblicherweise Werte zwischen 0,01 und 0,1. Die teilweise recht ungenauen Abschätzungen, welche bei der Vorgabe der Randbedingungen für die Turbulenzgrößen gemacht werden müssen, sind in der Regel nicht kritisch, da im Innern des Berechnungsgebietes starke Turbulenzproduktion auftritt und somit der konvektive Transport der Turbulenzgrößen von untergeordneter Bedeutung ist.

Ausströmrund

Am Ausströmrund wird kein fester Wert für die Geschwindigkeit, sondern eine Gradientenbedingung bzw. eine konvektive Randbedingung vorgeschrieben. Die Werte auf dem Ausströmrund müssen aus dem Gebietsinnern extrapoliert werden. Eine nachfolgende Korrektur, welche sicherstellt, dass auch in der Anfangsphase der iterativen Berechnung der aus dem Gebiet austretende Massenfluss gleich groß ist wie der eintretende, beschleunigt die Konvergenz des Verfahrens ganz erheblich. Bei der numerischen Simulation stationärer Strömungen wird zumeist eine einfache Gradientenbedingung verwendet, welche sich aus der Annahme ergibt, dass in Richtung der Austrittsnormalen keine Änderungen in den Variablen auftreten. Für instationäre Problemstellungen eignet sich diese Randbedingung nur bedingt, da sie bewirkt, dass stromauf

entstandene Störungen den Ausströmrand nicht ungehindert passieren, sondern ins Berechnungsgebiet zurück reflektiert werden. Die konvektive Randbedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + U_M \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (3.28)$$

verhindert dieses Problem dagegen weitestgehend [FP96]. Die Geschwindigkeit U_M ergibt sich aus dem korrigierten Massenfluss und der Fläche des Ausströmrandes.

Feste Wände

Das Fluid haftet an Wänden, mit anderen Worten es gilt

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.29)$$

Die Gittergeschwindigkeit wird aus Gitterpunktkoordinaten verschiedener Zeitebenen berechnet. Der Abschnitt 3.3.3 zeigte, dass die Normalkomponente der Gittergeschwindigkeit bereits durch das VCL festgelegt ist. Es erscheint naheliegend, die fehlende Tangentialkomponente aus einem Finite-Differenzen-Ansatz zu bestimmen, also

$$\dot{\mathbf{x}}^{\parallel n} = \frac{\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}}{\Delta \tau} \cdot \mathbf{t}^n \quad (3.30)$$

für eine zeitliche Diskretisierung erster Ordnung bzw.

$$\dot{\mathbf{x}}^{\parallel n} = \frac{3\mathbf{x}^n - 4\mathbf{x}^{n-1} + \mathbf{x}^{n-2}}{2\Delta \tau} \cdot \mathbf{t}^n \quad (3.31)$$

für eine zeitliche Diskretisierung zweiter Ordnung, und diese mit der Normalkomponente via Gleichung 3.22 zu einem vollständigen Vektor zusammenzufügen. Ein solcherart konstruierter Gittergeschwindigkeitsvektor erfüllt das diskrete VCL auch auf dem Rand.

Die turbulenten Fluktuationen verschwinden auf dem Rand und damit natürlich auch die turbulente kinetische Energie. Weniger einfach ist die Vorgabe einer geeigneten Randbedingung für die spezifische Dissipationsrate, da sie gegen Unendlich strebt, wenn der Wandabstand gegen Null geht. Eine Lösung für dieses Problem bietet die Analyse des asymptotischen Verhaltens (siehe z. B. [Run99]). Sie basiert auf der Annahme, dass sich molekulare Diffusion und Dissipation in unmittelbarer Wandnähe im Gleichgewicht befinden. Es zeigt sich hierbei, dass die spezifische Dissipationsrate umgekehrt proportional zum Quadrat des Wandabstandes n ist. Man findet für das Wilcox $k - \omega$ Modell

$$\omega = \frac{6\mu}{\rho C_{\omega 2} n^2}, \quad (3.32)$$

während sich für das LLR $k - \omega$ Modell aufgrund der etwas anderen Definition der Koeffizienten

$$\omega = \frac{6\mu}{\rho(C_{\omega 2} - 1)n^2} \quad (3.33)$$

ergibt. Anstelle des Wertes an der Wand kann damit der Wert im wandnächsten Zellmittelpunkt vorgegeben werden. Der Wandpunkt selbst geht somit in die Bilanzgleichung der spezifischen Dissipationsrate nicht mehr ein.

3.5.2 Randbedingung für den Druck

Die Bestimmungsgleichung für die Druckkorrekturen, welche sich aus dem SIMPLE-Algorithmus ergibt, ist in ihrer Struktur ähnlich der diskretisierten Form einer Poisson-Gleichung. Es werden also Randbedingungen für die Druckkorrekturgleichung auf der gesamten Gebietsberandung benötigt. Die Geschwindigkeitskorrekturen sollen an allen Rändern (Einströmrand, Ausströmrand und feste Wände) Null sein. Diese Forderung ist gleichbedeutend mit einer Neumann-Randbedingung für die Druckkorrekturen. Da sie für die gesamte Gebietsberandung gilt, ist das resultierende Gleichungssystem singular. Um ein reguläres Gleichungssystem zur Bestimmung der Druckkorrekturen zu erhalten, wird eine zusätzliche Gleichung benötigt. Dazu wird die Druckkorrektur in einem bestimmten, frei wählbaren Punkt gleich Null gesetzt. Die Singularität des Gleichungssystems hat ihren Ursprung darin, dass der Druck in der Impulsgleichung nur als Gradient auftritt. Eine beliebige Konstante, welche zum Druck addiert wird, hat auf die Impulsgleichung keinen Einfluss. Durch die zusätzliche Bedingung wird der Wert der Konstanten und damit das Druckfeld eindeutig festgelegt.

3.6 Lösung des algebraischen Gleichungssystems

Das Ziel der Diskretisierung ist es, für jede der unbekannten Variablen u , v , p , k und ω ein algebraisches Gleichungssystem zu erhalten. Dies ermöglicht dann in einem zweiten Schritt die entkoppelte, sequentielle Lösung der einzelnen Gleichungssysteme mittels eines geeigneten numerischen Verfahrens und somit, im Rahmen einer äußeren Iteration, die Lösung des Gesamtsystems. Die Koeffizienten der algebraischen Gleichungssysteme werden mit Variablenwerten des zurückliegenden Iterationsschrittes berechnet. Dies ist notwendig, um eine Entkopplung und Linearisierung der Bilanzgleichungen zu erreichen. Zur Lösung der einzelnen algebraischen Gleichungssysteme wird die ‘Strongly Implicit Procedure’ (SIP) von Stone [Sto68] verwendet. Dieses semi-implizite, iterative Verfahren hat sich für Anwendungen der numerischen Strömungsmechanik bewährt. Das SIP-Verfahren setzt eine pentadiagonale Koeffizientenmatrix, wie sie sich z. B. aus der impliziten Behandlung des Normaldiffusionsterms ergibt, voraus. Alle Beiträge, die zu Einträgen auf anderen Diagonalen oder zu einer Verletzung der Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix führen würden, müssen explizit behandelt werden; d. h. sie werden mit Werten des zurückliegenden Iterationsschrittes berechnet und dem Quellterm zugeschlagen. Beim Konvektionsterm führt diese Vorgehensweise dazu, dass nur der Upwind-Anteil implizit behandelt wird (‘deferred correction approach’, [KR74]).

4 Validierung des Programms

Das Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen Strömungen auf raumfesten Rechengittern ist ausführlich getestet worden (z. B. [RT96], [Kub97]). Es genügt deshalb, die Approximationen, welche im Zusammenhang mit der Erweiterung des Verfahrens auf zeitveränderliche Rechengitter gemacht wurden, kritisch zu überprüfen. Dies geschieht im Folgenden anhand ausgewählter Testfälle.

4.1 Gleichförmige Strömung auf transientem Gitter

Ein erster Testfall, welcher bereits Eingang in einschlägige Fachbücher (vgl. [Shy96]) gefunden hat, ist die gleichförmige Strömung auf einem Rechengitter mit zeitveränderlichen Zellvolumen. Er basiert auf der grundlegenden Forderung, dass eine räumlich und zeitlich konstante Strömung durch eine beliebig vorgegebene Gitterbewegung nicht gestört werden darf. Um dies sicherzustellen, ist es zwingend erforderlich, dass die Diskretisierung des Konvektionsterms und des instationären Terms konsistent zum VCL erfolgt [DP88].

Das transiente Gitter oszilliert zwischen zwei Zuständen \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 , welche in der Abbildung 4.1 dargestellt sind. Dabei, wie auch bei den beiden nachfolgenden Abbildungen, ist aus Gründen der Übersichtlichkeit sowohl in x - als auch in y -Richtung jeder zweite Gitterpunkt ausgeblendet. Der zeitliche Verlauf des Gitters ist gegeben

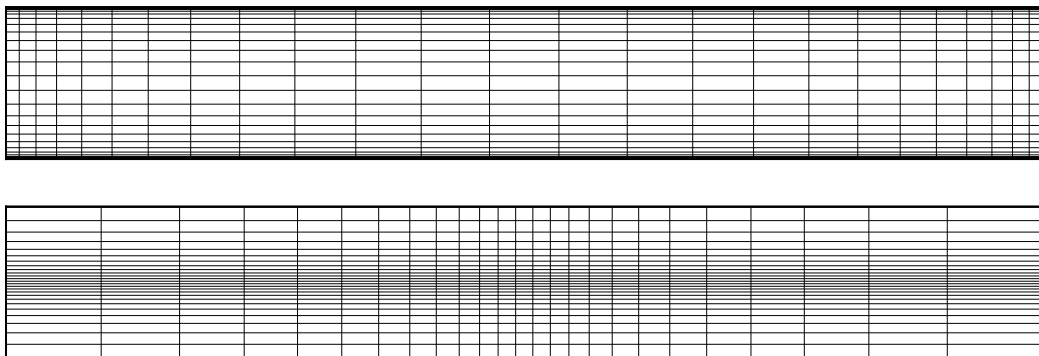


Abbildung 4.1: Darstellung der Extremzustände \mathbf{x}_1 (oben) und \mathbf{x}_2 (unten), welche im Verlauf der oszillierenden Gitterbewegung erreicht werden

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_1 f + \mathbf{x}_2(1 - f), \\ \text{mit } f &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi t) + 1]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden.

Bei dem in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz kommenden numerischen Verfahren ist das diskrete VCL automatisch erfüllt. Eine Verfälschung der Strömungslösung durch die Gitterbewegung ist damit — unabhängig vom gewählten Zeitschritt — ausgeschlossen. Dies ist nicht der Fall, wenn, wie in der Literatur gelegentlich zu beobachten (z. B. [VG76, ARH80, MMV97]), die Gittergeschwindigkeit aus einem Finite-Differenzen-Ansatz bestimmt wird. Der numerische Fehler macht sich in Form eines von der vorgegebenen, konstanten Lösung abweichenden Geschwindigkeitsfeldes bemerkbar. Er geht bei Verkleinerung der Zeitschrittweite, je nach Fehlerordnung, mehr oder weniger schnell gegen Null. Die Abbildung 4.2 zeigt das Geschwindigkeitsfeld für einen Finite-Differenzen-Ansatz zweiter Ordnung, welches sich bei einer Aufteilung der Periode in 32 Teilintervalle ergibt. Der Fehler könnte durch eine wesentlich feinere Aufteilung zum Verschwinden gebracht werden. Einer sukzessiven Verfeinerung sind jedoch aufgrund der damit einhergehenden Steigerung des Rechenaufwandes Grenzen gesetzt. Ein Finite-Differenzen-Ansatz stellt somit keine gute Alternative zur Bestimmung der Gittergeschwindigkeit dar. Es ist auch versucht worden, die einfachere Formel 3.23 für die Gittergeschwindigkeit zusammen mit der zeitlichen Approximation zweiter Ordnung (siehe Gleichung 3.6) zu verwenden [Sch01, Bun01]. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die Volumeninkremente der zurückliegenden Zeitebene nicht benötigt werden und somit Speicherplatz eingespart wird. Sie führt aber auf der anderen Seite zu einer Inkonsistenz zum VCL. In der Abbildung 4.3 wird deutlich, dass der hierdurch hervorgerufene Fehler noch viel größer ausfällt als beim Finite-Differenzen-Ansatz.

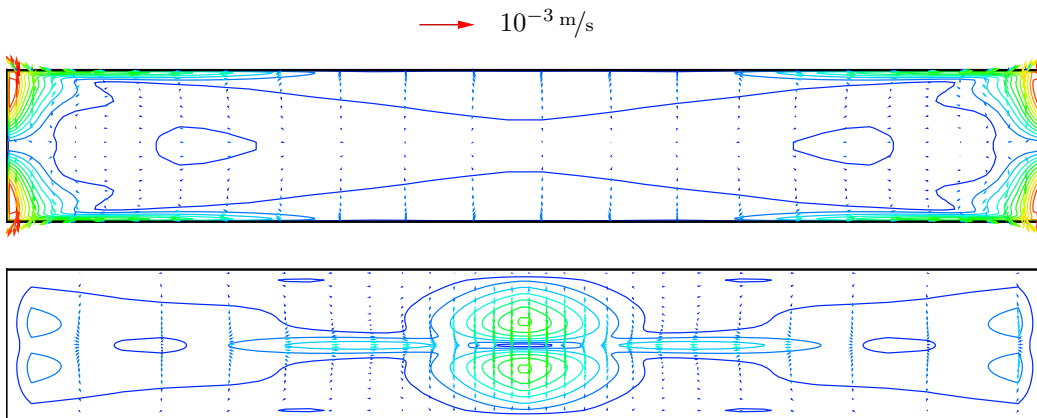


Abbildung 4.2: Geschwindigkeitsvektoren und Isotachen bei $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$ (oben) und $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_2$ (unten), verursacht durch oszillierende Gitterbewegung und Verletzung des VCL aufgrund der Diskretisierung von $\dot{\mathbf{x}}$ mittels Finite-Differenzen-Ansatz zweiter Ordnung

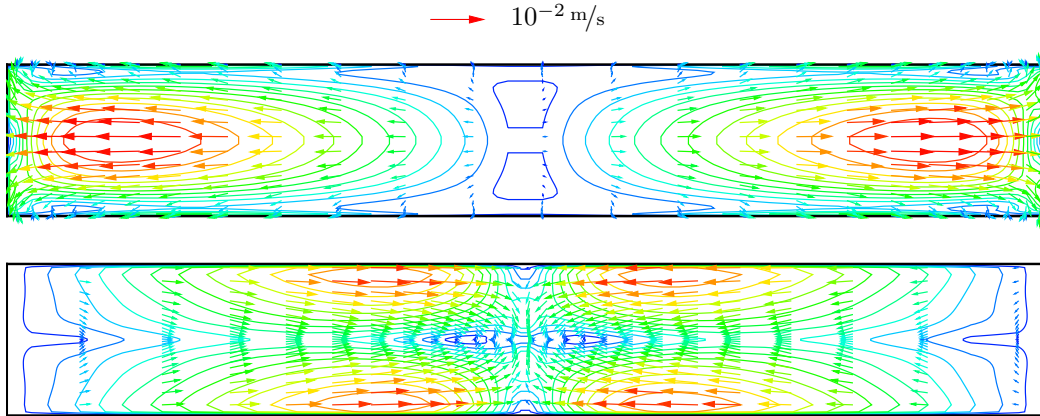


Abbildung 4.3: Geschwindigkeitsvektoren und Isotachen bei $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$ (oben) und $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_2$ (unten), verursacht durch oszillierende Gitterbewegung und inkonsistente zeitliche Diskretisierung von \mathbf{u} und $\dot{\mathbf{x}}$

4.2 Oszillierende Platte

Zur Validierung des Programms bietet sich auch die instationäre Strömung über einer in x -Richtung harmonisch oszillierenden, horizontalen Platte an. Für diese Konfiguration liegt eine analytische Lösung vor, deren Herleitung z. B. in [SK80] beschrieben wird. Für eine vorgegebene Plattenbewegung

$$x(t) = \frac{U_0}{n} \sin(nt) \quad (4.2)$$

ergibt sich

$$u(y, t) = U_0 e^{-\delta} \cos(nt - \delta) \quad (4.3)$$

als Lösung der Kontinuitäts- und Impulsgleichung. Dabei stellt $\delta = y\sqrt{n/2\nu}$ den dimensionslosen Wandabstand dar. Der Einfluss der Randbewegung erstreckt sich bis ins Unendliche, nimmt jedoch exponentiell mit dem Wandabstand ab. Für $n/\nu \gg 1$ ist die oszillierende Bewegung des Fluids praktisch auf eine dünne Schicht beschränkt, der sogenannten ‘Stokes layer’. Sie tritt bei vielen Anwendungen auf, die durch eine oszillierende Grundströmung gekennzeichnet sind [Tel81].

Das oszillierende Geschwindigkeitsprofil klingt mit größer werdendem Wandabstand schnell ab und ist für $\delta > 6$ praktisch gleich Null. Die räumliche Diskretisierung stützt sich auf 120 im Wandbereich konzentrierte Gitterpunkte. Die logarithmische Verteilung der Punkte wird in der Abbildung 4.4 deutlich, wobei allerdings aus Gründen der Übersichtlichkeit nur jeder fünfte Punkte gezeigt wird. Zur Vereinfachung der Darstellung wurde $n = 2\pi$ gesetzt. Die Abbildung 4.4 zeigt das Geschwindigkeitsprofil zum Zeitpunkt der maximalen Plattenauslenkung $nt = \pi/2$ und beim Nulldurchgang $nt = \pi$. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich die berechneten Profile mit abnehmen-

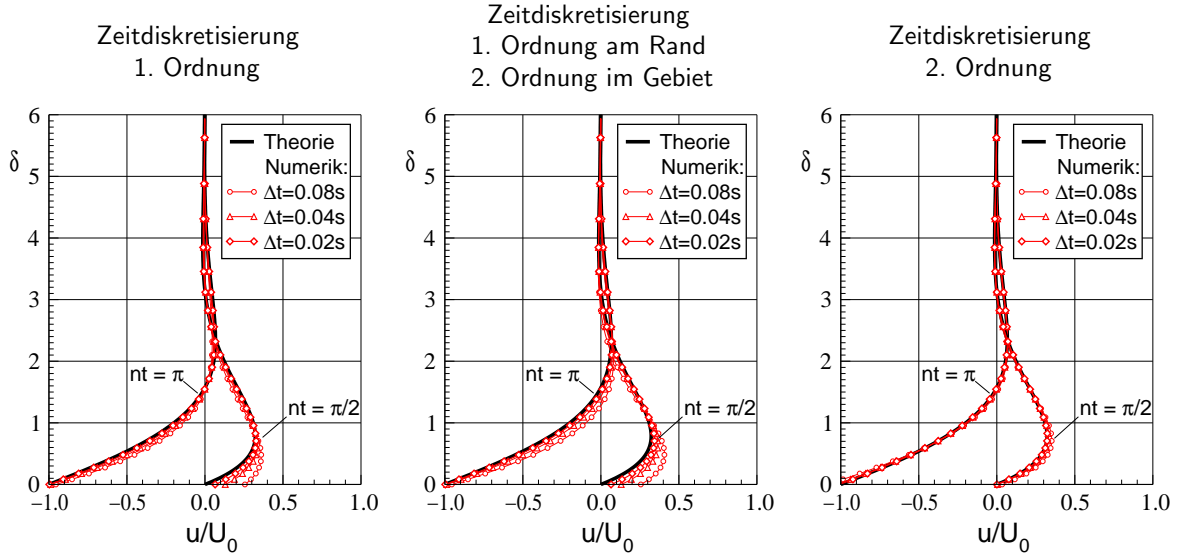


Abbildung 4.4: Strömung über einer oszillierenden Platte; Vergleich numerische Berechnung — Theorie

der Zeitschrittweite immer mehr der analytischen Lösung annähern, wobei die zeitliche Diskretisierung höherer Ordnung erwartungsgemäß sehr viel genauere Ergebnisse liefert. Interessant ist in diesem Zusammenhang der in der Mitte dargestellte Fall, bei dem im Gebiet eine zeitliche Diskretisierung zweiter Ordnung und am Rand eine Diskretisierung erster Ordnung verwendet wird. In einem frühen Entwicklungsstadium des verwendeten Computerprogramms ist diese Vorgehensweise für verschiedene Anwendungen getestet worden [Sch01, Bun01], da sie den Vorteil hat, dass sich die Implementierung der Randbedingungen etwas vereinfacht. Offensichtlich führt sie jedoch im Vergleich zur Diskretisierung erster Ordnung zu keiner Verbesserung, sondern bewirkt vielmehr das Gegenteil!

Weitergehende Aussagen über den Diskretisierungsfehler lassen sich aus dem in der Abbildung 4.5 dargestellten zeitlichen Verlauf der Fehlernorm

$$\|u_{num} - u_{ex}\| = \int_0^6 \sqrt{(u_{num} - u_{ex})^2} d\delta \quad (4.4)$$

ableiten. Sie stellt ein Maß für die Abweichung der numerischen Lösung u_{num} von der analytischen Lösung u_{ex} dar. Nachdem die Rechnung am Beginn mit dem Anfangswert $u = 0$ initialisiert wird, dauert es einige Perioden, bis die mit der Startprozedur verbundenen Fehler abgeklungen sind und sich eine periodisch oszillierende Lösung ausbildet. Man erkennt deutlich, dass das Verfahren zweiter Ordnung — bei gleichem Zeitschritt — einen geringeren Fehler aufweist. Erwartungsgemäß ergibt sich für das Verfahren erster Ordnung ein linearer Zusammenhang zwischen Fehler und Zeitschrittweite, während beim Verfahren zweiter Ordnung der Fehler bei Halbierung der Schrittweite auf ein Viertel zurückgeht.

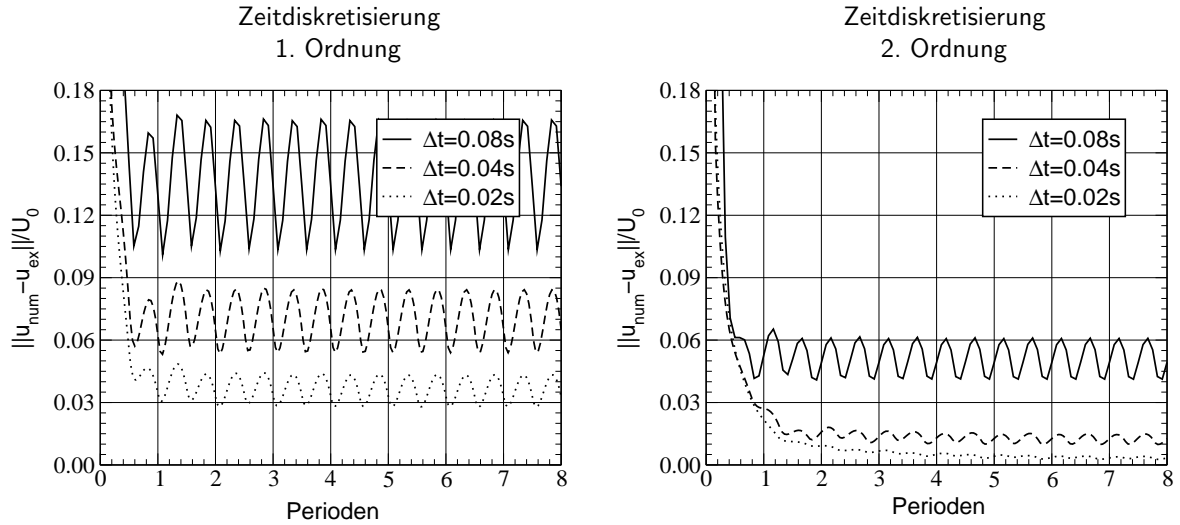


Abbildung 4.5: Strömung über einer oszillierenden Platte; Diskretisierungsfehler als Funktion der Zeit

4.3 Rotierender Kanal

Zur Überprüfung der Leistungsfähigkeit von Turbulenzmodellen wird häufig die Strömung in einem rotierenden Kanal betrachtet (z.B. [LTY87, SR92, You93]). Diese Strömungskonfiguration eignet sich auch hervorragend dazu, den ALE-Formalismus zu validieren. Ebenso wie bei der oszillierenden Platte treten bei diesem Testfall mögliche Fehler bei der Implementierung der Randbedingungen und des instationären Terms sofort zutage. Darüberhinaus erlaubt dieser Testfall die Evaluierung des Einflusses der Gitterbewegung auf das Turbulenzmodell sowie auf die Güte der Approximation des konvektiven Terms.

Die Abbildung 4.6 zeigt eine Skizze des rotierenden Kanals. Bei numerischen Simulationen dieser Strömungskonfiguration werden häufig die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen von Lezius und Johnston [JHL72, LJ76] zum Vergleich herangezogen. In Anlehnung an ihre Arbeit wird die Reynoldszahl $Re = 11400$, die Rosby-

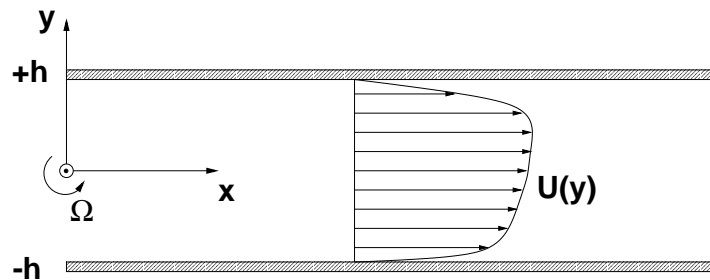


Abbildung 4.6: Skizze des rotierenden Kanals

zahl $Ro = 0.117$, die volumetrisch gemittelte Geschwindigkeit $u_m = 0,3 \text{ m/s}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 0,94 \text{ 1/s}$ gesetzt. Durch die Transformation der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen auf ein mit dem Kanal rotierendes Koordinatensystem ergibt sich ein stationäres Strömungsproblem [SR92], welches einfach und hochgenau numerisch gelöst werden kann. Die auf diesem Wege erzeugte numerische Lösung dient als Referenzlösung zur Validierung des ALE-Formalismus. Das verwendete Rechengitter besteht aus 52×52 Gitterpunkten. Eine Verdichtung der Punkte zu den Kanalwänden hin gewährleistet, dass sich wenigstens acht Punkte in der laminaren Unterschicht befinden und der Wandbereich somit sehr gut aufgelöst ist. Zwischen der zeitlich konstanten Relativgeschwindigkeit \mathbf{u}_{rel} , welche die Strömung bezüglich des mit dem Kanal rotierenden Koordinatensystems beschreibt, und der Absolutgeschwindigkeit besteht der folgende Zusammenhang:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Indem das Geschwindigkeitsprofil vom Auströmrund zum Einströmrund gespiegelt wird, ist sichergestellt, dass trotz des kleinen Längen- zu Höhenverhältnisses des Kanals ($L/H = 7$) im Verlauf der iterativen Lösungsprozedur eine voll ausgebildete turbulente Strömung entsteht. Dies ist dann erreicht, wenn sich das Geschwindigkeitsprofil beim Durchlaufen des Kanals nicht mehr ändert.

Im Allgemeinen werden in Systemen mit rotierenden Komponenten, wie etwa Pumpen oder Turbinen, durch die Wirkung der Corioliskraft Sekundärströmungen hervorgerufen [LTY87]. Auch die Turbulenzstruktur erfährt eine nachhaltige Veränderung. Dies geht sogar bis hin zu einer teilweisen Relaminarisierung [JHL72]. Der dafür verantwortliche Zusatzterm in der Bilanzgleichung für die Reynoldsspannungen ist spurfrei und bleibt folglich ohne Einfluss auf die Bilanz der turbulenten kinetischen Energie [JHL72, LTY87]. Einfache Zweigleichungsmodelle, wie z. B. das $k - \omega$ Modell von Wilcox, sind aus diesem Grunde nicht in der Lage, der Systemrotation Rechnung zu tragen. Sie liefern — im Widerspruch zu experimentellen Befunden — ein symmetrisches Geschwindigkeitsprofil, und zwar genau jenes, welches sich auch bei einem feststehenden Kanal ausbildet [You93]. Wie in der Abbildung 4.7 deutlich wird, gilt dies nicht für das LLR $k - \omega$ Modell. Die Flanken des Geschwindigkeitsprofils verlaufen links steiler und rechts etwas flacher als beim Wilcox-Modell. Ausserdem liegt das Geschwindigkeitsmaximum nicht in der Mitte, sondern ist nach rechts verschoben. Die numerische Lösung zeigt somit zumindest qualitative Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Die Ursache hierfür ist in der Definition der Parameter des Turbulenzmodells zu suchen. Im Gegensatz zum Scherraten-Tensor \mathbf{S} erfüllt der Wirbeltensor \mathbf{W} nicht das Prinzip der materiellen Objektivität. Dies macht sich dadurch bemerkbar, dass bei positiver Winkelgeschwindigkeit Ω der Parameter W in der linken Kanalhälfte ($y < 0$) kleinere und in der rechten größere Werte annimmt. Der Parameter C_μ verhält sich reziprok zu W (siehe Seite 14). Die hierdurch hervorgerufene Veränderung im Geschwindigkeitsprofil kann als ein Versuch des LLR-Modells interpretiert werden, in der linken Kanalhälfte die Anfachung der turbulenten Fluktuationen und in der

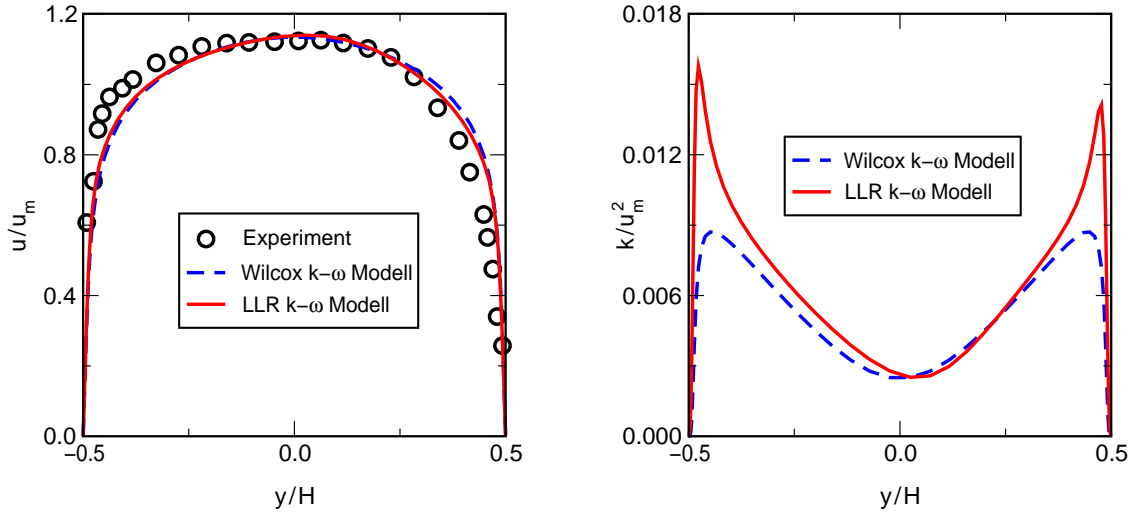


Abbildung 4.7: Rotierender Kanal; Vergleich der numerischen Referenzlösung mit experimentellen Daten

rechten Hälfte deren Dämpfung zu simulieren. Die Abbildung 4.7 zeigt, dass sich als indirekte Folge davon auch eine ungleichmäßige Verteilung der turbulenten kinetischen Energie über den Kanalquerschnitt ausbildet. Die Beobachtungen hinsichtlich des Einflusses der Rotation auf die turbulenten Fluktuationen befinden sich im Einklang mit den Schlussfolgerungen einer theoretischen Stabilitätsanalyse von Lezius und Johnston [JHL72, LJ76]. Der nun folgenden Untersuchung liegt das LLR-Modell zu Grunde, sofern nicht anders vermerkt.

Eine zweite Möglichkeit, die Strömung im Kanal zu berechnen, besteht darin, die ALE-Gleichungen für ein rotierendes Rechengitter zu lösen. Dabei stellt die Absolutgeschwindigkeit \mathbf{u} die unbekannte Variable dar, welche als Lösung der Impulsgleichung gesucht ist. Diese Betrachtungsweise führt zu einer instationären Problemstellung, da die Absolutgeschwindigkeit aufgrund ihrer Abhängigkeit von \mathbf{x} eine Funktion der Zeit ist. Bevor im Folgenden auf die Auswirkungen des zeitlichen Diskretisierungsfehlers näher eingegangen wird, soll zunächst kurz der Einfluss des räumlichen Diskretisierungsfehlers diskutiert werden.

Wie eingangs beschrieben, gelingt es, durch eine Transformation auf ein mit dem Kanal rotierendes Koordinatensystem, eine hochgenaue Referenzlösung zu erzeugen. Dies ist in erster Linie dem Umstand zu verdanken, dass die Problemstellung durch die Transformation stationär wird. Überdies erweist es sich als vorteilhaft, dass die Relativgeschwindigkeit längs der Kanalachse konstant ist. In diesem Fall ermöglicht nämlich schon der Upwind-Ansatz eine exakte Rekonstruktion der Variablenwerte an den Zellgrenzflächen. Damit wird der numerische Fehler, welcher bei der Diskretisierung des Konvektionsterms entsteht und, wie der Abschnitt 3.3.3 gezeigt hat, die Qualität der numerischen Simulation maßgeblich beeinflusst, weitestgehend vermieden. Entsprechendes gilt auch für die einfache Gradientenbedingung, welche als Ausströmrandbedingung vorgegeben wird. Bei der instationären Problemstellung hingegen

ist die Absolutgeschwindigkeit die Variable, welche auf die Zellgrenzflächen extrapoliert werden muss. Sie ist nicht konstant längs der Kanalachse, was höhere Anforderungen an das Konvektionsschema stellt bzw. eine feinere Gitterteilung in Strömungsrichtung erforderlich macht. Neben der Variablenextrapolation ist auch die Berechnung der Gittergeschwindigkeit mit einem numerischen Fehler behaftet. Die Auswirkungen werden spürbar bei einem Rechengitter, welches nur mit 12 Gitterpunkten in Strömungsrichtung aufgelöst wird und die Gitterzellen infolgedessen ein für praktische Anwendungen durchaus nicht untypisches maximales Seitenverhältnis von 500 aufweisen. Die Abbildung 4.8 zeigt die entsprechenden Abweichungen im Verlauf der turbulenten kinetischen Energie von der Referenzlösung. Der zeitliche Diskretisierungsfehler spielt hierbei keine Rolle, da er durch Verwendung eines Verfahrens zweiter Ordnung in Verbindung mit einem hinreichend kleinen Zeitschritt ($\Delta t = 0,05$ s) nahezu vollständig verschwindet, wie weiter unten noch gezeigt werden wird. Der UMIST-Ansatz liefert erwartungsgemäß ein genaueres Ergebnis als der Upwind-Ansatz. Eine noch deutlichere Verbesserung kann durch die Verfeinerung des Gitters in Strömungsrichtung erreicht werden. Dies geht sogar soweit, dass bei einem Rechengitter mit 52×52 Punkten kein Unterschied mehr zur Referenzlösung erkennbar ist. Alle weiteren Berechnungen sind deshalb mit dem feineren Rechengitter durchgeführt worden.

Die Abbildung 4.9 zeigt die Abnahme des numerischen Fehlers bei Verkleinerung der Zeitschrittweite. Die entsprechenden Profile der Relativgeschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie sind für die größten hier verwendeten Zeitschrittweiten in den Abbildungen 4.10 und 4.11 dargestellt. Der zeitliche Diskretisierungsfehler führt zu einer deutlich sichtbaren Abweichung von der Referenzlösung, vor allem bei der tur-

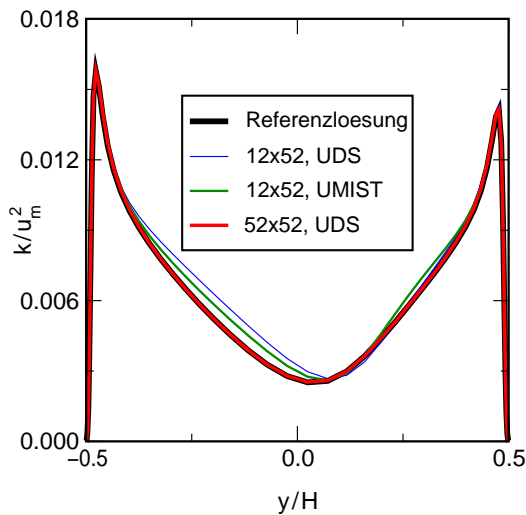


Abbildung 4.8: Rotierender Kanal; Einfluss des Diskretisierungsfehlers auf das Profil der turbulenten kinetischen Energie in Abhängigkeit von räumlicher Auflösung und verschiedenen Konvektionsschemata

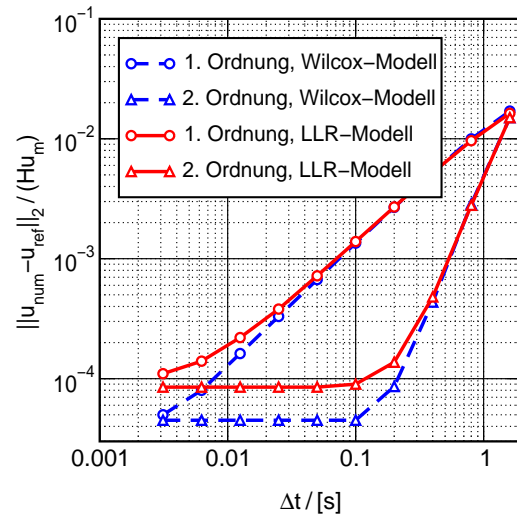


Abbildung 4.9: Rotierender Kanal; Abnahme des Diskretisierungsfehlers bei Verkleinerung der Zeitschrittweite

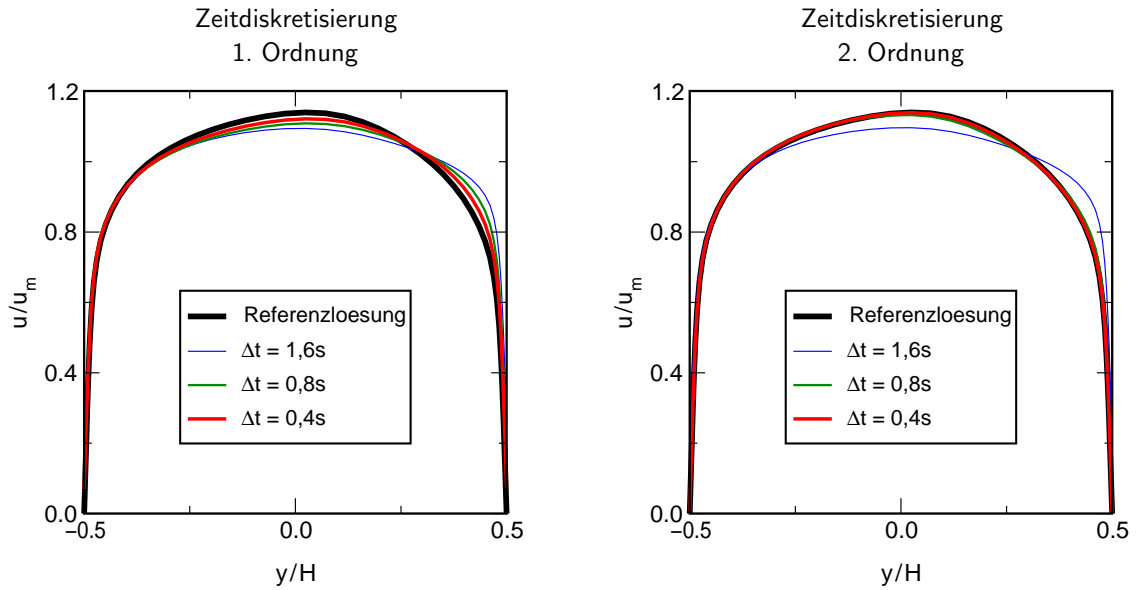


Abbildung 4.10: Rotierender Kanal; Verlauf der Relativgeschwindigkeit für verschiedene Zeitschrittweiten

bulenten kinetischen Energie. Der Einfluss dieses numerischen Fehlers auf die Lösung nimmt allerdings mit kleiner werdender Zeitschrittweite ab, bis schließlich keine Abweichung von der Referenzlösung mehr feststellbar ist (vgl. Abbildung 4.8). Sowohl für das LLR-Modell als auch das Wilcox-Modell ergibt sich beim Verfahren erster Ordnung ein über weite Strecken linearer Zusammenhang zwischen Zeitschrittweite und Fehler. Beim Verfahren zweiter Ordnung hingegen geht der Fehler bei Halbierung der Schrittweite auf ein Viertel zurück. Damit weist das numerische Verfahren offensichtlich die

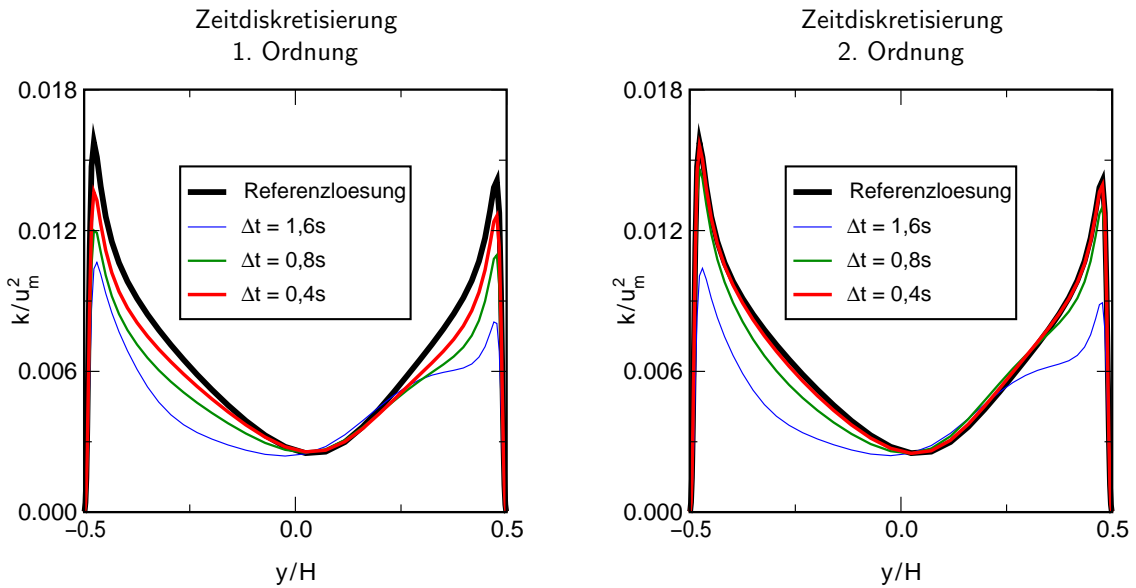


Abbildung 4.11: Rotierender Kanal; Verlauf der turbulenten kinetischen Energie für verschiedene Zeitschrittweiten

theoretisch vorhergesagte Fehlerordnung auf. Mögliche Fehler bei der Anpassung der Randbedingungen sowie der instationären und konvektiven Terme in den Erhaltungsgleichungen und den Turbulenzmodellen an die veränderte Problemstellung können somit weitgehend ausgeschlossen werden. Abschließend bleibt festzuhalten, dass das Verfahren zweiter Ordnung gegenüber dem Verfahren erster Ordnung unbedingt vorzuziehen ist. Wie bei diesem Testfall deutlich wurde, kann damit eine Reduktion des Rechenaufwandes um ein bis zwei Größenordnungen einhergehen.

5 Methoden zur Gitternachführung

Die Aufgabe der Gitternachführung ist es, ein vorhandenes Ausgangsgitter an eine veränderte Berandung anzupassen. Dabei ist für die nachfolgende Strömungsberechnung von entscheidender Bedeutung, dass die wesentlichen Eigenschaften des Gitters erhalten bleiben. So sind z.B. Überschneidungen benachbarter Gitterlinien unbedingt zu vermeiden. Im Verlauf einer instationären Strömungssimulation mit beweglicher Strömungsberandung muss gegebenenfalls für jeden Zeitschritt eine Anpassung des Rechengitters erfolgen. Ein interaktives Verfahren zur Gitternachführung ist aus diesem Grund nicht praktikabel. Ein geeignetes Verfahren zur Gitternachführung sollte vielmehr ein integraler, vollautomatisch ablaufender Bestandteil des gesamten Strömungssimulationsprogramms sein. Das Lösen der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen beansprucht in der Regel einen Großteil der zur Verfügung stehenden Computerressourcen. Vor diesem Hintergrund ist es wichtig, dass das Verfahren zur Gitternachführung nur einen geringen zusätzlichen Rechenzeitbedarf aufweist.

Dadurch dass ein Gitter für den ersten Zeitschritt vorhanden ist, welches als Referenzgitter für alle weiteren Gitter dient (vgl. Abbildung 5.1), wird die Aufgabe im Vergleich zur Generierung eines vollständig neuen Gitters stark vereinfacht. Die Topologie des Gitters ist bekannt, nur die Koordinaten der Gitterpunkte im Gebietsinnern müssen gefunden werden. Es gibt eine ganze Reihe von Ansätzen, die dafür geeignet erscheinen. Sie werden im Folgenden näher beschrieben.

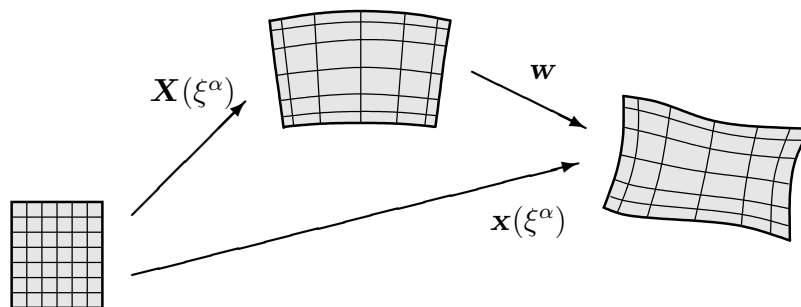


Abbildung 5.1: *Rechenebene, Referenz- und aktuelles Gitter*

5.1 Algebraische Methoden

Algebraische Methoden sind gekennzeichnet durch einen einfachen funktionalen Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten x_α und den krummlinigen Koordinaten ξ^α . Ihr Hauptvorteil besteht darin, dass sie äußerst wenig Rechenzeit benötigen. Besonders weite Verbreitung fand das von Gordon und Hall [GH73] entwickelte Verfahren der transfiniten Interpolation (TFI). Es wird in jüngster Zeit auch verstärkt zur Gitternachführung eingesetzt und soll deshalb in einer für zweidimensionale Problemstellungen geeigneten Form kurz vorgestellt werden.

Bei der transfiniten Interpolation betrachtet man die Abbildung eines Einheitsquadrats auf ein topologisch äquivalentes physikalisches Gebiet. Die eigentliche Aufgabe besteht darin, eine auf dem Rand bekannte Größe \mathbf{F} auf geeignete Weise in das Gebietsinnere zu interpolieren. Die gesuchte Interpolationsfunktion \mathbf{T} setzt sich aus den einfachen, linearen Funktionen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{K} zusammen:

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = \mathbf{A}(\xi, \eta) + \mathbf{B}(\xi, \eta) - \mathbf{K}(\xi, \eta). \quad (5.1)$$

Die Funktionen \mathbf{A} und \mathbf{B} repräsentieren dabei jeweils eine unidirektionale Interpolation zwischen zwei gegenüberliegenden Rändern:

$$\mathbf{A}(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)\mathbf{F}(0, \eta) + [1 - \varphi(\xi, \eta)]\mathbf{F}(1, \eta), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta)\mathbf{F}(\xi, 0) + [1 - \psi(\xi, \eta)]\mathbf{F}(\xi, 1). \quad (5.3)$$

Die Funktion \mathbf{K} stellt ein Korrekturglied dar, welches dafür sorgt, dass \mathbf{T} und \mathbf{F} auf dem Rand gleich sind und somit sicherstellt, dass sich \mathbf{F} ins Gebietsinnere stetig fortsetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\xi, \eta) = & \varphi(\xi, \eta)\psi(\xi, \eta)\mathbf{F}(0, 0) + \varphi(\xi, \eta)[1 - \psi(\xi, \eta)]\mathbf{F}(0, 1) \\ & + [1 - \varphi(\xi, \eta)]\psi(\xi, \eta)\mathbf{F}(1, 0) + [1 - \varphi(\xi, \eta)][1 - \psi(\xi, \eta)]\mathbf{F}(1, 1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

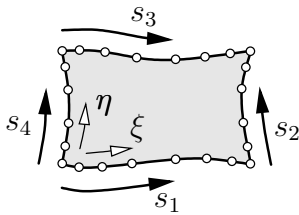


Abbildung 5.2: Definition der Bogenlänge s

Ob mit der Interpolation ein befriedigendes Ergebnis erzielt werden kann, hängt maßgeblich von der Wahl der Funktionen φ und ψ ab. Sie müssen auf den Rändern die Werte 0 bzw. 1 annehmen und im Gebietsinnern streng monoton wachsen. Wichtig ist darüber hinaus vor allem, dass die Randpunkteverteilung auf angemessene Weise berücksichtigt wird. Die nachfolgenden Gleichungen 5.5 und 5.6 basieren auf diesem Grund auf der normierten Bogenlänge s .

$$\varphi(\xi, \eta) = [1 - s_1(\xi)]\eta + [1 - s_3(\xi)](1 - \eta), \quad (5.5)$$

$$\psi(\xi, \eta) = [1 - s_4(\eta)]\xi + [1 - s_2(\eta)](1 - \xi). \quad (5.6)$$

Im Gegensatz zur sonst üblichen Form der TFI werden bei der Gitternachführung nicht die Koordinaten des aktuellen Gitters \mathbf{x} (vgl. Abbildung 5.1) als unbekannte Größen

angesehen, sondern das Verschiebungsfeld \mathbf{w} , welches den Unterschied zwischen dem aktuellen Gitter und dem Referenzgitter \mathbf{X} beschreibt:

$$\mathbf{w} := \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (5.7)$$

Die gesuchten Koordinaten des aktuellen Gitters ergeben sich aus Gleichung 5.7, nachdem das Verschiebungsfeld zuvor berechnet wurde. Diese Form der TFI wird zusammen mit anderen Verfahren, welche ebenfalls die Bestimmung des Verschiebungsfeldes zum Ziel haben, unter dem Begriff ‘perturbation methods’ subsummiert. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie in Abwesenheit einer Randverschiebung das Referenzgitter reproduzieren. Im Falle einer Deformation der Berandung ergibt sich für das Verschiebungsfeld im Allgemeinen ein viel einfacherer funktionaler Zusammenhang $\mathbf{w}(\xi^\alpha)$ als für die Abbildung $\mathbf{x}(\xi^\alpha)$, was sowohl für die TFI als auch für numerische Verfahren von Vorteil ist.

Wie eingangs erwähnt, kann die TFI zunächst einmal nur auf ein einfaches strukturiertes Gitter angewandt werden, welches topologisch einem Einheitsquadrat entspricht. Bei blockstrukturierten Gittern wird die Frage aufgeworfen, wie interne Blockgrenzen zu behandeln sind. Badcock u. a. [BRW00] schreiben bei einem Gitter um einen Mehrkomponenten-Tragflügel die Bewegung der Ecken der Gitterblöcke explizit vor. Da dies keine befriedigende Lösung darstellt, regen sie an, die Verschiebung der internen Blockgrenzen mit Hilfe eines Federanalogie-Modells zu ermitteln. Praktisch durchgeführt wird dies von Wong u. a. [WTC⁺00]. Sie betrachten die Kanten der Gitterblöcke als elastische Federn, welche als Reaktion auf die Randverschiebung eine Verschiebung der Ecken der Gitterblöcke bewirken. Durch Interpolation können daraus die Verschiebungen der internen Blockgrenzen bestimmt werden. Mit diesem primitiven Modell lassen sich bereits eine Vielzahl von Problemen lösen. Wesentlich besser ist es jedoch, nicht nur die Verschiebung der Ecken der Gitterblöcke sondern auch die der internen Blockgrenzen selbst durch ein hochwertiges Strukturanalogie-Modell zu steuern, und zwar auf eine Art und Weise, welche die Gitterqualität weitestgehend erhält. Dieser vielversprechende, neue Ansatz wird in Kapitel 6 anhand konkreter Beispiele näher erläutert.

5.2 Differentielle Methoden

Die Aufgabe der Gitternachführung kann auch als Randwertproblem aufgefasst werden, bei dem sich die gesuchten Gitterpunktkoordinaten im Gebietsinnern durch Lösung einer elliptischen Differentialgleichung ergeben. Ilinca [Ili94] schlug vor, eine Laplace-Gleichung für die Gittergeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ zu lösen. Zur Begründung dafür, weshalb eine Laplace-Gleichung hierfür besonders geeignet ist, führte er zwei Gründe an. Zum einen kann diese Gleichung mit vergleichsweise geringem Aufwand gelöst werden. Zum anderen werden die Randvorgaben für $\dot{\mathbf{x}}$ durch eine Lösung, welche einer Laplace-Gleichung genügt, sehr glatt und ohne Sprünge ins Gebietsinnere fortgesetzt. Eine glatte Lösung kann als notwendige Voraussetzung dafür angesehen werden, dass keine

Überschneidungen benachbarter Gitterlinien auftreten. Um die Gitterpunktkoordinaten zu erhalten, muss die Verschiebung \mathbf{w} aus der Gittergeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ durch zeitliche Integration bestimmt werden. Der numerische Fehler, der dabei entsteht führt zu einer restriktiven Zeitschrittweitenbeschränkung. Er kann ganz vermieden werden, wenn die Laplace-Gleichung direkt für die Verschiebungen anstelle der Gittergeschwindigkeit formuliert wird:

$$\nabla^2 \mathbf{w} = 0. \quad (5.8)$$

In der Praxis zeigt sich jedoch, dass bei diesem Ansatz in Wandnähe leicht Überschneidungen benachbarter Gitterlinien auftreten können. Crumpton und Giles [CG95] versehen die Gleichung 5.8 deshalb mit einem Diffusionskoeffizienten, mit dem in begrenztem Maße gesteuert werden kann, welche Zellen weniger und welche mehr verzerrt werden dürfen:

$$\nabla \cdot (k \nabla \mathbf{w}) = 0. \quad (5.9)$$

Sie setzen $k = \frac{1}{Vol(\mathbf{x}_i)}$, wobei der Nenner das Zellvolumen der dem Gitterpunkt \mathbf{x}_i zugeordneten Zelle des Dualgitters bezeichnet (vgl. Abbildung 3.2b).

Der Implementierung der Gleichungen 5.8 und 5.9 in das *Elan2*-Programm liegt dasselbe FV-Verfahren zu Grunde das auch zur Lösung der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen verwendet wird. Die Unbekannten werden jedoch nicht wie bei der Strömungsberechnung in den Zellmittelpunkten berechnet und gespeichert, sondern in den Gitterpunkten. Ebenso wie bei der numerischen Strömungssimulation werden strukturierte Teilblöcke nacheinander berechnet, die, da sie sich an den Rändern überlappen, gekoppelt sind und sich so im Verlauf einer äußeren Iteration die gesuchte Lösung ergibt. Da die Unbekannten aber nun in den Zellecken gespeichert sind, muss die Lösungssequenz leicht abgeändert werden. Sie ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

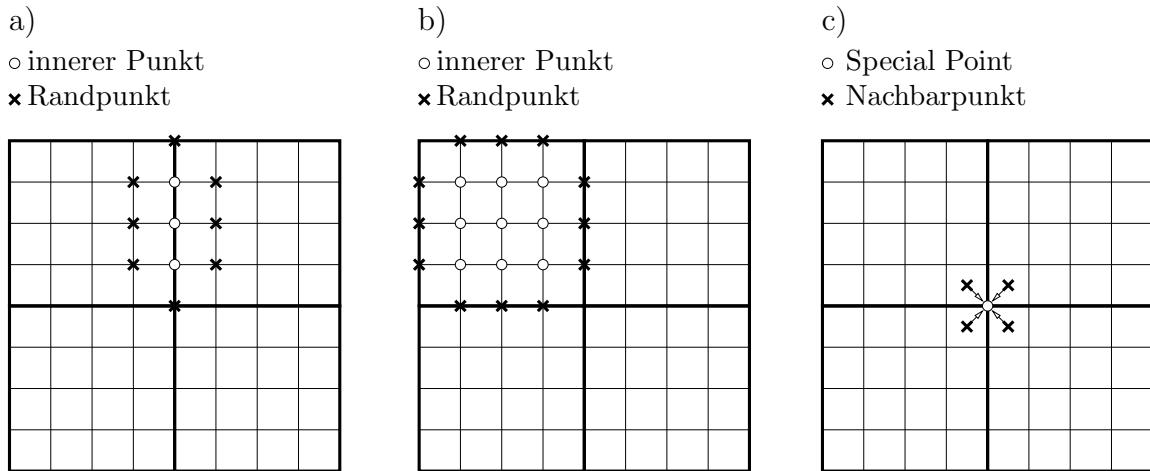


Abbildung 5.3: Sequenz zur Berechnung von Gitterpunkten

Zunächst werden für die Blockgrenzen Hilfszonen definiert und damit die Punkte auf den Blockgrenzen ausgerechnet (Abbildung 5.3a). Dann werden die Punkte im Innern aller strukturierten Teilgitter ausgerechnet (Abbildung 5.3b). Am Ende müssen noch die sogenannten ‘Special Points’ aus den benachbart liegenden Werten interpoliert werden (Abbildung 5.3c). Diese Sequenz wird wiederholt, bis sich eine konvergente Lösung einstellt.

5.3 Analogien zur Strukturmechanik

Analogien zur Strukturmechanik sind ein weiterer vielversprechender Ansatz für die Konstruktion von Methoden zur Gitternachführung. Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang Strukturmodelle, deren Verhalten sich vollständig durch eine Energiefunktion beschreiben lässt. Dabei ist der in der Struktur herrschende Spannungs- und Verzerrungszustand eindeutig durch das Minimum dieser Energiefunktion bestimmt. Eine charakteristische Eigenschaft solcher Strukturen ist die Existenz eines spannungs- und verzerrungsfreien Zustandes für den die potentielle Energie gleich Null ist. Die zur Überführung in einen anderen, deformierten Zustand notwendige Energie wird in der Struktur gespeichert und steht zur vollständigen Wiederherstellung des Ausgangszustands zur Verfügung. Im Kontext der Gitternachführung wird der verzerrungsfreie Zustand durch das Referenzgitter repräsentiert. Diese Eigenschaften ermöglichen es, eine effiziente Lösungsstrategie einzusetzen, welche nachfolgend ausführlich beschrieben wird. Im Anschluss daran werden verschiedene Energiefunktionen eingeführt.

5.3.1 Algorithmus zur nichtlinearen Minimierung

Es sei Z eine beliebige, gegebenenfalls nichtlineare Zielfunktion, welche von den unbekannten Komponenten der Verschiebungsvektoren \mathbf{w}_i abhängt. Dadurch, dass die Anzahl der Unbekannten N im Allgemeinen sehr groß ist, werden die Auswahlmöglichkeiten für ein geeignetes Verfahren stark eingeschränkt. Den Ausgangspunkt der Überlegungen bildet eine Taylorreihenentwicklung der Funktion Z , die nach dem quadratischen Glied abgebrochen wird:

$$Z(\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}) = Z(\mathbf{w}) + \nabla_{\mathbf{w}} Z \cdot \Delta \mathbf{w} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{w}. \quad (5.10)$$

Für den Gradienten der Funktion findet man:

$$\nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}) + \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{w}. \quad (5.11)$$

Neben dem Gradienten spielt auch die Hessematrix \mathbf{H} eine wichtige Rolle für das numerische Verfahren,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 Z}{\partial b^2} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Gesucht ist nun ein \mathbf{w}_{min} für das die Funktion ihren Minimalwert annimmt. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass der Gradient $\nabla_{\mathbf{w}}Z(\mathbf{w}_{min})$ verschwindet. Man definiert nun eine Abstiegsrichtung \mathbf{a} , welche mit einer Schrittweite λ multipliziert und zu \mathbf{w} addiert das gesuchte \mathbf{w}_{min} liefern soll. Offensichtlich ist $\mathbf{a} = -\mathbf{H}^{-1}\nabla_{\mathbf{w}}Z$ in Verbindung mit $\lambda = 1$ eine mögliche Wahl. Dies ist das Newton-Verfahren. Es konvergiert lokal quadratisch. Wenn die Startschätzung jedoch nicht nah genug an der Lösung liegt, besteht die Gefahr, dass das Verfahren divergiert. Um die globale Konvergenz sicherzustellen, muss λ aus dem Intervall $(0, 1)$ auf geeignete Weise bestimmt werden. Hierfür gibt es eine Standardvorgehensweise, die z. B. in [DS83] ausführlich beschrieben ist. Das Newton-Verfahren wird in der Praxis selten zur Minimierung nichtlinearer Funktionen eingesetzt, zum einen weil der Aufwand zur Berechnung und Invertierung der Matrix \mathbf{H} meist inakzeptabel groß ist und zum anderen, weil bei einer großen Zahl von Unbekannten der Speicherplatzbedarf für eine im Allgemeinen vollbesetzte Matrix \mathbf{H} zu groß ist.

Ein Verfahren, bei dem ganz auf die Berechnung der Matrix \mathbf{H} verzichtet wird, ist das klassische Gradientenverfahren. Man setzt $\mathbf{a} = -\nabla_{\mathbf{w}}Z$. Zur Bestimmung von λ gibt es einen effizienten Algorithmus, der im Wesentlichen auf einer inversen quadratischen Interpolation beruht [Pea92]. Das Gradientenverfahren konvergiert jedoch zu langsam, um praktische Bedeutung zu haben.

Zwischen diesen beiden Methoden ist das Verfahren der konjugierten Gradienten ('Conjugate Gradients', kurz CG) angesiedelt. Ebenso wie beim Gradientenverfahren wird auf die Berechnung der Matrix \mathbf{H} verzichtet, so dass das Verfahren nur einen moderaten Speicherplatzbedarf ($\mathcal{O}(N)$) aufweist. Trotzdem konvergiert es superlinear und damit vergleichsweise schnell. Der Grund hierfür ist die rekursive Bestimmung der Abstiegsrichtung, für die die Hessematrix verwendet wird, ohne sie selbst jemals explizit auszurechnen. Es werden lediglich Größen vom vorhergehenden Iterationsschritt benötigt.

$$\mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)} + \gamma^{(k)} \mathbf{a}^{(k-1)}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla_{\mathbf{w}}Z^{(k)}, \quad (5.14)$$

$$\gamma^{(k)} = \frac{(\mathbf{d}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k-1)}) \cdot \mathbf{d}^{(k)}}{\mathbf{d}^{(k-1)} \cdot \mathbf{d}^{(k-1)}}. \quad (5.15)$$

Es gibt noch andere Varianten des CG-Verfahrens, die sich in der Bestimmung von $\gamma^{(k)}$ unterscheiden. Die hier verwendete Formel nach Polak und Ribière hat sich für die praktische Anwendung am besten bewährt [Pea92]. Erst durch eine geeignete Vorkonditionierung wird das CG-Verfahren jedoch richtig effizient. Das Verfahren der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung ('Preconditioned Conjugate Gradients',

kurz PCG) unterscheidet sich vom CG-Verfahren formal nur geringfügig:

$$\mathbf{a}^{(k)} = \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} + \gamma^{(k)} \mathbf{a}^{(k-1)}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}^{(k)}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla_{\mathbf{w}} Z^{(k)}, \quad (5.18)$$

$$\gamma^{(k)} = \frac{(\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} - \tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)}) \cdot \mathbf{d}^{(k)}}{\tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)} \cdot \mathbf{d}^{(k-1)}}. \quad (5.19)$$

Hierbei ist \mathbf{P} eine positiv definite Matrix, die eine gute Approximation von \mathbf{H} und leicht zu invertieren sein soll. Für die Bestimmung der Schrittweite $\lambda^{(k)}$ bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. In der Grundform des PCG-Verfahrens wird dafür ein eindimensionales Subminimierungsproblem gelöst [Pea92]:

$$Z(\mathbf{w}^{(k)} + \lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}) = \text{Min!}. \quad (5.20)$$

Es kann sich jedoch als wesentlich günstiger erweisen [Jac88, Pea92], stattdessen das folgende, zur Minimierungsaufgabe 5.20 äquivalente Nullstellenproblem zu betrachten:

$$\nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}^{(k)} + \lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}^{(k)} = 0. \quad (5.21)$$

Ein wesentliches Element eines konjugierte-Gradienten-Verfahrens ist der gelegentliche Neustart der iterativen Lösungsprozedur. Das CG-Verfahren wurde ursprünglich für quadratische Funktionen hergeleitet. Es kann gezeigt werden (siehe z. B. [Kos93]), dass das CG-Verfahren in diesem Fall theoretisch nach N Iterationsschritten die exakte Lösung liefert. Bei nichtlinearen Problemstellungen gilt dies nicht. Die iterative Lösungsprozedur kann nach N Schritten jedoch nicht einfach fortgesetzt werden, da der Begriff “konjugierte Richtung” dann seine Bedeutung verliert. Deshalb ist es erforderlich, die Iteration auf der Grundlage der durch die vorangegangenen N Iterationsschritte verbesserten Lösung neu zu starten. Dies geschieht ganz einfach, indem $\gamma^{(N)}$ gleich Null gesetzt wird. Bei Problemstellungen mit einer sehr großen Zahl von Variablen, wie der vorliegenden, ist aber der Rechenzeitbedarf schon für N Iterationen viel zu groß. Mit einer guten Vorkonditionierung reichen jedoch ca. \sqrt{N} Iterationsschritte aus, um eine ausreichend gute Näherung für die Lösung zu erhalten [Pir89]. Trotzdem kann ein gelegentlicher Neustart notwendig werden, da sich, vor allem im Falle einer schlecht konditionierten Hessematrix, bei der sukzessiven Berechnung der konjugierten Richtungen Rundungsfehler akkumulieren. Mit größer werdendem Einfluss der Rundungsfehler gleicht sich die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens dem des gewöhnlichen Gradientenverfahren an. Es gibt keine ausgereifte Theorie für ein gutes Neustartkriterium, die diesem Problem Rechnung trägt. Ein heuristisches Kriterium für einen Neustart, das sich als praxistauglich erweist, wird von Kosmol [Kos93] angegeben. Ein Neustart soll durchgeführt werden, wenn gilt: $|\mathbf{d}^{(k)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)}| > |\mathbf{d}^{(k-2)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-2)}|$. Eine Motivation für diese Vorgehensweise ist die Überlegung, dass bei exakter —

d. h. in Abwesenheit von Rundungsfehlern — eindimensionaler Minimierung $\mathbf{d}^{(k)}$ und $\tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)}$ senkrecht aufeinander stehen. Ausserdem ist klar, dass der Gradient beim Start der Iteration relativ groß ist und im Minimum des Funktional verschwindet. Im Verlauf der iterativen Berechnung wird der Gradient also immer kleiner werden. Wenn nun das Skalarprodukt $|\mathbf{d}^{(k)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)}|$ trotzdem größer wird als $|\mathbf{d}^{(k-2)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-2)}|$, so ist dies ein sicheres Zeichen dafür, dass der Rundungsfehler die konjugierten Richtungen signifikant verfälscht hat.

Als Konvergenzkriterium des iterativen Verfahrens dient üblicherweise der Quotient $|\mathbf{d}^{(k)}|/|\mathbf{d}^{(0)}|$ (vgl. [Sch97]). Es zeigt sich jedoch, dass für dieses Konvergenzkriterium kaum geeignete Werte angegeben werden können, da sie von Anwendung zu Anwendung extrem stark variieren. Der Ausdruck $|\lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}|/|\mathbf{a}^{(0)}|$ erweist sich hier als deutlich besser geeignet. Alternativ dazu kommt auch der Quotient $\frac{Z^{(k)} - Z^{(k+1)}}{Z^{(k)}}$ als Konvergenzkriterium in Frage, wobei die Iteration im Allgemeinen terminiert werden kann, wenn der Wert 10^{-3} erreicht worden ist, da sich die Zielfunktion dann praktisch kaum noch ändert. Im Vergleich zu den ersten beiden Möglichkeiten hat das letztgenannte Konvergenzkriterium allerdings den Nachteil, dass sich der Rechenaufwand erhöht, weil neben dem Gradienten nun auch die Zielfunktion selbst berechnet werden muss. Die vorstehenden Überlegungen sind in dem Algorithmus 5.3.1 nochmals zusammengefasst.

-
- (i) $k = 0$: Fehlerschranke tol festlegen, Startlösung $\mathbf{w}^{(0)}$ wählen
 - (ii) $\mathbf{a}^{(0)} = \tilde{\mathbf{d}}^{(0)}$, $\tilde{\mathbf{d}}^{(0)} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}^{(0)}$, $\mathbf{d}^{(0)} = -\nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}^{(0)})$
 - (iii) $\nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}^{(k)} + \lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}^{(k)} = 0 \quad \leadsto \quad \lambda^{(k)}$
 - (iv) $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} + \lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}$
 - (v) $\mathbf{d}^{(k+1)} = -\nabla_{\mathbf{w}} Z(\mathbf{w}^{(k+1)})$, $\tilde{\mathbf{d}}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}^{(k+1)}$
 - (vi) $\gamma^{(k+1)} = \frac{(\tilde{\mathbf{d}}^{(k+1)} - \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}) \cdot \mathbf{d}^{(k+1)}}{\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)}}$ bzw. $\gamma^{(k+1)} = 0$ wenn $\frac{|\mathbf{d}^{(k)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-1)}|}{|\mathbf{d}^{(k-2)} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{(k-2)}|} > 1$
 - (vii) $\mathbf{a}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{d}}^{(k+1)} + \gamma^{(k+1)} \mathbf{a}^{(k)}$
 - (viii) Falls $|\lambda^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}|/|\mathbf{a}^{(0)}| > tol$: zurück nach (iii) mit $k = k + 1$,
-

Algorithmus 5.3.1: PCG-Verfahren zur nichtlinearen Minimierung

5.3.2 Federanalogie-Modell

Ein sehr populärer Ansatz ist das Federanalogie-Modell von Batina [Bat89, Bat91]. Dabei werden die Kanten der Gitterzellen als lineare Federn angesehen. Die Federkraft ist proportional zur Verzerrung, einer dimensionslosen Größe, gebildet aus der Dehnung und der Kantenlänge l . Als Maß für die Dehnung bietet sich die Differenz im Verschiebungsvektor zwischen einem Gitterpunkt \mathbf{x}_i und seinem Nachbarn \mathbf{x}_j an. Der Proportionalitätsfaktor kann gleich Eins gesetzt werden. Die im gesamten Federsystem

gespeicherte Energie ergibt sich somit zu:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{E}} \frac{1}{l_{ij}^n} (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j)^2 \quad \text{wobei } i, j \in \mathcal{D}(k). \quad (5.22)$$

Dabei steht \mathcal{E} für die Menge der Kanten während $\mathcal{D}(k)$ das Punktepaar bezeichnet, welches die Kante k definiert. Der Exponent n trat in der ursprünglichen Formulierung von Batina nicht auf. Er wurde später eingeführt [LRB93, Blo00], um eine weitergehende Kontrolle über die Qualität der erzeugten Gitter zu erlangen. Die Energiefunktion gemäß Gleichung 5.22 ist positiv und quadratisch. Folglich hat sie nur ein Minimum, welches dadurch charakterisiert werden kann, dass die Ableitung nach \mathbf{w}_i verschwindet. Die Ableitung der Energiefunktion lautet:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{w}_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{l_{ij}^n} (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) \quad \forall \quad i \in \mathcal{V}. \quad (5.23)$$

Hierin bezeichnet \mathcal{V} die Menge aller Gitterpunkte im Gebietsinnern und $\mathcal{N}(i)$ die Menge der Nachbarn eines Gitterpunkts \mathbf{x}_i . In den Originalarbeiten von Batina [Bat89, Bat91] ebenso wie auch in neueren Arbeiten (vgl. [AV99, Bar00, Blo00]) bildet die Gleichung 5.23 den Ausgangspunkt für die Lösungsprozedur. Dazu wird die Ableitung gleich Null gesetzt und die Gleichung mittels eines einfachen Jacobi-Verfahrens oder eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens nach den gesuchten Verschiebungen \mathbf{w}_i aufgelöst. Alternativ dazu können die Verschiebungen auch mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Methode durch Lösung eines Minimierungsproblems bestimmt werden. In diesem Falle wird zur Konstruktion einer geeigneten Vorkonditionierung die zweite Ableitung von S benötigt. Dabei handelt es sich um eine 2×2 -Matrix von denkbar einfacher Gestalt. Nur die Diagonalelemente sind von Null verschieden. Sie lauten:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_i^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial b_i^2} = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{l_{ij}^n} \quad \forall \quad i \in \mathcal{V}. \quad (5.24)$$

Hierbei bezeichnen a_i und b_i die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{w}_i . Die Berechnung der Schrittweite $\lambda^{(k)}$ aus der Gleichung 5.21 ist bei dem Federanalogie-Modell sehr einfach. Die Ableitung der Energiefunktion ist nämlich eine lineare Funktion des Verschiebungsvektors. Da der Verschiebungsvektor für einen gegebenen Iterationsschritt selbst eine lineare Funktion der Schrittweite ist, genügen zwei Funktionsauswertungen um die Schrittweite $\lambda^{(k)}$ gemäß Gleichung 5.21 zu bestimmen.

5.3.3 Linear-elastisches Modell

Das Gitter kann auch als ein diskreter Repräsentant eines isotropen, linear-elastischen Kontinuums angesehen werden. Das Kräftegleichgewicht, das Hooke'sche Materialgesetz und die Verschiebungs-Verzerrungsrelation sind die Grundgleichungen, welche das

Verhalten eines solchen Körpers beschreiben.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (5.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2E\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Sp}\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\delta}, \quad (5.26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla). \quad (5.27)$$

Der Aufwand zur Lösung dieser Gleichungen fällt erheblich geringer aus, wenn das Kräftegleichgewicht für den undeformierten Körper formuliert wird (Theorie 1. Ordnung). Dabei wird eine Beschränkung des Gültigkeitsbereichs auf kleine Deformationen in Kauf genommen. Die Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in der Verschiebungs-Verzerrungsrelation hat zur Folge, dass das Verzerrungsmaß $\boldsymbol{\varepsilon}$ nicht rotationsinvariant ist¹. Da es sich bei dem Rechengitter nicht um ein reales Material handelt, hat man alle Freiheiten, die Grundgleichungen weiter zu vereinfachen und geeignete Materialparameter auszuwählen. Werden (konservative) Volumenkräfte \mathbf{b} ungleich Null zugelassen, die als Funktion eines geeigneten Indikators für Diskretisierungsfehler gewählt werden, so ergibt sich die Basis für ein adaptives Verfahren. Die Entwicklung eines solchen Verfahrens würde aber über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen, deshalb werden die Volumenkräfte ebenfalls gleich Null gesetzt. Johnson und Tezduyar [JT94] untersuchten den Einfluss des Querdehnungskoeffizienten λ auf die Qualität der erzeugten Gitter und kamen dabei zu dem Schluss, dass sich die besten Ergebnisse mit $\lambda = 0$ erzielen lassen. Während in der ersten Arbeit, die sich dieser Strukturanalogie bediente, noch von einem konstanten E -Modul ausgegangen wurde [LO80], verwendeten Johnson und Tezduyar einen E -Modul, der umgekehrt proportional zur Jacobi-Determinante J der Abbildung $\mathbf{X}(\xi^\alpha)$ ist. Sie begründeten ihre Wahl damit, dass kleine Zellen dadurch starrer werden und sich folglich weniger stark deformieren. Da sich kleine Zellen zu meist in besonders kritischen Bereichen des Gebiets befinden, ist dies sicherlich ein wünschenswerter Effekt. Die Spannungen, welche sich als Lösung der Gleichung 5.25 ergeben, sind keine realen Spannungen und als solche nicht von Interesse. Sie können mit Hilfe der Gleichungen 5.26 und 5.27 eliminiert werden. Dadurch reduziert sich das Gleichungssystem 5.25 bis 5.27 auf eine einzige Gleichung, welche nur noch die gesuchten Verschiebungen als Unbekannte enthält. Diese Gleichung wird als Navier'sche Gleichung bezeichnet. Sie ergibt sich bei Vernachlässigung der Volumenkräfte und des Querdehnungskoeffizienten zu:

$$\nabla \cdot [E(\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla)] = 0. \quad (5.28)$$

Die Navier'sche Gleichung weist große Ähnlichkeit mit der Diffusionsgleichung 5.9 auf. Es kann deshalb für beide Gleichungen dasselbe Verfahren zur numerischen Lösung ver-

¹Es könnte im Prinzip auch die nichtlineare Verschiebungs-Verzerrungsrelation (vgl. [Eri62]) zur Konstruktion eines Gitternachführungsalgorithmus verwendet werden. Eine solche Formulierung würde jedoch invertierte Gitterzellen zulassen, da sie invariant gegenüber einer Achsenspiegelung ist. Wie Tests mit verschiedenen nichtäquidistanten Gittern gezeigt haben, kann es unter solchen Voraussetzungen selbst bei einfachen Konfigurationen leicht zu übereinander gefalteten Gitterzellen kommen.

wendet werden. Chiandussi u. a. [CBO00] untersuchten neben rein auf geometrischen Größen basierten Funktionen für den E -Modul auch Ansätze, die den Verzerrungszustand direkt berücksichtigen. Dazu wurde zunächst ein Verschiebungsfeld unter der Annahme eines konstanten E -Moduls berechnet. Dieses diente dazu, die Energiedichte f zu ermitteln, welche im deformierten Volumenelement gespeichert ist.

$$f = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.29)$$

Die Energiedichte wurde dann als E -Modul für die zweite, eigentliche Berechnung des Verschiebungsfelds verwendet. Durch diese Vorgehensweise ist sichergestellt, dass sich Gebiete in denen es zu starken Verzerrungen kommen kann, besonders starr verhalten.

Wie beim Federanalogie-Modell gibt es auch beim linear-elastischen Modell eine weitere Möglichkeit das Verschiebungsfeld zu ermitteln. Die gesuchte Lösung zeichnet sich dadurch aus, dass für sie die im deformierten Körper gespeicherte Energie F minimal wird.

$$F = \frac{1}{2} \iint_{\eta \xi} f J d\xi d\eta. \quad (5.30)$$

Zur Konstruktion eines effizienten Minimierungsalgorithmus ist es zwingend erforderlich, den Gradienten des Energiefunktional 5.30 zu kennen. Die Herleitung gelingt mit Hilfe von Methoden aus der Funktionalanalysis. Die Definition des Gradienten² basiert auf dem Skalarprodukt für vektorwertige Funktionen,

$$\langle \nabla_{\mathbf{w}} F, \mathbf{t} \rangle = \iint_{\eta \xi} \nabla_{\mathbf{w}} F(\xi, \eta) \cdot \mathbf{t}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5.31)$$

Hierin bezeichnet \mathbf{t} eine Testfunktion, welche die Eigenschaft hat, auf dem Rand zu verschwinden. Die Herleitung von $\nabla_{\mathbf{w}} F$ erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird die Richtungsableitung $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{t}$ gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} = \iint_{\eta \xi} (f_{,\dot{a}} \dot{t}_1 + f_{,\check{a}} \check{t}_1) J d\xi d\eta + \iint_{\eta \xi} (f_{,\dot{b}} \dot{t}_2 + f_{,\check{b}} \check{t}_2) J d\xi d\eta. \quad (5.32)$$

Nun muss die rechte Seite dieser Gleichung so umgeformt werden, dass sie die Form des Skalarprodukts $\langle \nabla_{\mathbf{w}} F, \mathbf{t} \rangle$ hat. Dies gelingt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} = & - \iint_{\eta \xi} \left[(J f_{,\dot{a}})_{,\xi} + (J f_{,\check{a}})_{,\eta} \right] t_1 d\xi d\eta \\ & - \iint_{\eta \xi} \left[(J f_{,\dot{b}})_{,\xi} + (J f_{,\check{b}})_{,\eta} \right] t_2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.33)$$

²Es handelt sich hierbei genau genommen um den Fréchet-Gradienten [Jah94].

Der gesuchte Gradient kann jetzt direkt abgelesen werden.

$$\nabla_{\mathbf{w}} F = \begin{pmatrix} [\nabla_{\mathbf{w}} F]_1 \\ [\nabla_{\mathbf{w}} F]_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (Jf_{,\acute{a}})_{,\xi} + (Jf_{,\check{a}})_{,\eta} \\ (Jf_{,\acute{b}})_{,\xi} + (Jf_{,\check{b}})_{,\eta} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Die zweite Ableitung $\nabla_{\mathbf{w}}^2 F$ lässt sich auf ähnliche Weise gewinnen. Die Komponenten von $\nabla_{\mathbf{w}}^2 F$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathbf{w}}^2 F]_{11} &= -(Jf_{,\acute{a}\acute{a}})_{,\xi} \partial_{\xi} - (Jf_{,\acute{a}\acute{a}})_{,\xi} \partial_{\eta} - (Jf_{,\check{a}\acute{a}})_{,\eta} \partial_{\xi} - (Jf_{,\check{a}\acute{a}})_{,\eta} \partial_{\eta}, \\ [\nabla_{\mathbf{w}}^2 F]_{12} &= -(Jf_{,\acute{b}\acute{a}})_{,\xi} \partial_{\xi} - (Jf_{,\acute{b}\acute{a}})_{,\xi} \partial_{\eta} - (Jf_{,\check{b}\acute{a}})_{,\eta} \partial_{\xi} - (Jf_{,\check{b}\acute{a}})_{,\eta} \partial_{\eta}, \\ [\nabla_{\mathbf{w}}^2 F]_{21} &= -(Jf_{,\acute{a}\acute{b}})_{,\xi} \partial_{\xi} - (Jf_{,\acute{a}\acute{b}})_{,\xi} \partial_{\eta} - (Jf_{,\check{a}\acute{b}})_{,\eta} \partial_{\xi} - (Jf_{,\check{a}\acute{b}})_{,\eta} \partial_{\eta}, \\ [\nabla_{\mathbf{w}}^2 F]_{22} &= -(Jf_{,\acute{b}\acute{b}})_{,\xi} \partial_{\xi} - (Jf_{,\acute{b}\acute{b}})_{,\xi} \partial_{\eta} - (Jf_{,\check{b}\acute{b}})_{,\eta} \partial_{\xi} - (Jf_{,\check{b}\acute{b}})_{,\eta} \partial_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Der Gradient $\nabla_{\mathbf{w}} F$ setzt sich im Wesentlichen aus Ableitungen nach \acute{a} , \check{a} , \acute{b} und \check{b} zusammen. Für sie findet man:

$$f_{,\acute{a}} = \varepsilon_{11} \xi_{,X} + \varepsilon_{12} \xi_{,Y}, \quad (5.36)$$

$$f_{,\check{a}} = \varepsilon_{11} \eta_{,X} + \varepsilon_{12} \eta_{,Y}, \quad (5.37)$$

$$f_{,\acute{b}} = \varepsilon_{12} \xi_{,X} + \varepsilon_{22} \xi_{,Y}, \quad (5.38)$$

$$f_{,\check{b}} = \varepsilon_{12} \eta_{,X} + \varepsilon_{22} \eta_{,Y}. \quad (5.39)$$

Die in $\nabla_{\mathbf{w}}^2 F$ auftretenden Ableitungen zweiter Ordnung beinhalten nur noch geometrische Faktoren:

$$f_{,\acute{a}\acute{a}} = 2\xi_{,X}^2 + \xi_{,Y}^2, \quad (5.40)$$

$$f_{,\check{a}\check{a}} = 2\eta_{,X}^2 + \eta_{,Y}^2, \quad (5.41)$$

$$f_{,\acute{b}\acute{b}} = \xi_{,X}^2 + 2\xi_{,Y}^2, \quad (5.42)$$

$$f_{,\check{b}\check{b}} = \eta_{,X}^2 + 2\eta_{,Y}^2. \quad (5.43)$$

Um den Algorithmus 5.3.1 anwenden zu können, muss nun die kontinuierliche Problemstellung in eine endlich-dimensionale überführt werden, welche nur noch die Verschiebungsvektoren \mathbf{w}_i der einzelnen Gitterpunkte als unbekannte Größen enthält. Dies gelingt mit Hilfe einer einfachen Finite-Differenzen-Approximation. Da im Gradienten $\nabla_{\mathbf{w}} F$ nur Ableitungen erster Ordnung auftreten, ergibt sich für ihn ein kompaktes Differenzenmolekül (Abbildung 3.2b), welches zu einer von zweiter Ordnung genauen Approximation führt. Mit dem Ziel vor Augen, aus dem Operator $\nabla_{\mathbf{w}}^2 F$ eine möglichst einfache, zur Vorkonditionierung geeignete Matrix \mathbf{P} zu konstruieren, betrachten wir die Diskretisierung des folgenden Ausdrucks:

$$\begin{aligned} (Jf_{,\acute{a}\acute{a}})_{,\xi} \partial_{\xi} + (Jf_{,\check{a}\acute{a}})_{,\eta} \partial_{\eta} &\approx (Jf_{,\acute{a}\acute{a}} \partial_{\xi})_e - (Jf_{,\acute{a}\acute{a}} \partial_{\xi})_w \\ &\quad + (Jf_{,\check{a}\acute{a}} \partial_{\eta})_n - (Jf_{,\check{a}\acute{a}} \partial_{\eta})_s. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Diskretisierung der Differentialoperatoren ∂_ξ und ∂_η an den Stellen e , w , n und s führt bei Vernachlässigung des Einflusses der Nachbarpunkte schließlich zu:

$$(Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_{,\xi}\partial_\xi + (Jf_{,\ddot{a}\ddot{a}})_{,\eta}\partial_\eta \approx - (Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_e - (Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_w - (Jf_{,\ddot{a}\ddot{a}})_n - (Jf_{,\ddot{a}\ddot{a}})_s. \quad (5.45)$$

Wenn nun noch die Nebendiagonalelemente $[\nabla_w^2 F]_{12}$ und $[\nabla_w^2 F]_{21}$ sowie die gemischten Terme $(Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_{,\xi}\partial_\eta$ etc. in den Diagonalelementen zu Null gesetzt werden, so ergeben sich die Komponenten der Vorkonditionierungsmatrix zu:

$$P_{11} = (Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_e + (Jf_{,\dot{a}\dot{a}})_w + (Jf_{,\ddot{a}\ddot{a}})_n + (Jf_{,\ddot{a}\ddot{a}})_s, \quad (5.46)$$

$$P_{22} = (Jf_{,\dot{b}\dot{b}})_e + (Jf_{,\dot{b}\dot{b}})_w + (Jf_{,\ddot{b}\ddot{b}})_n + (Jf_{,\ddot{b}\ddot{b}})_s. \quad (5.47)$$

Zur Bestimmung der Schrittweite $\lambda^{(k)}$ gemäß Gleichung 5.21 genügen wie beim Federanalogie-Modell zwei Funktionsauswertungen, da hier ebenfalls für einen gegebenen Iterationsschritt zwischen dem Gradienten $\nabla_w F$ und der Schrittweite ein linearer Zusammenhang besteht.

5.3.4 Hyperelastisches Modell

Ein von Jaquotte [Jac88] zur Gittergenerierung und -optimierung eingeführtes Verfahren, welches auf einer Analogie zur nichtlinearen Elastizitätstheorie basiert, scheint für die Gitternachführung geradezu prädestiniert. Um das von Jaquotte propagierte Strukturanalogie-Modell zu einem leistungsfähigen Verfahren zur Gitternachführung weiterentwickeln zu können, sind allerdings einige Modifikationen des ursprünglichen Ansatzes notwendig. Während Jaquotte z. B. von rechteckförmigen Referenzzellen ausgeht, kann diese Vereinfachung im Kontext der Gitternachführung nicht getroffen werden, da dort das Referenzgitter nicht aus rechteckförmigen Volumenzellen aufgebaut ist. Das theoretische Fundament bleibt jedoch dasselbe und soll im Folgenden näher erläutert werden.

Materialien, deren Eigenschaften sich durch eine Energiefunktion vollständig beschreiben lassen, werden als hyperelastisch bezeichnet. Um aus dieser allgemeinen Klasse von Materialien eine geeignete Wahl zu treffen, müssen die Eigenschaften des Strukturmodells im Hinblick auf die vorgesehene Anwendung festgelegt werden. Wenn sich die Gebietsberandung als ganzes wie ein Starrkörper bewegt, müssen sich alle Gitterzellen ebenfalls wie Starrkörper bewegen. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Energiefunktion invariant gegenüber Starrkörperbewegungen ist. Im Bestreben die unüberschaubare Zahl der Möglichkeiten auf sinnvolle Weise weiter einzugrenzen erscheint es naheliegend, sich wie im vorangehenden Abschnitt auf Materiale zu beschränken, die isotrop sind. Eine Energiedichtefunktion h , die all diesen Bedingungen genügt, kann nur noch vom rechten Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} (oder äquivalenten Verzerrungstensoren) bzw. dessen Invarianten \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 abhängig sein (vgl. [Eri62]):

$$h = h(\mathbf{C}) = h(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2). \quad (5.48)$$

Die Invarianten erhält man durch Bildung der Spur bzw. der Determinante des Cauchy-Green-Tensors:

$$\mathcal{I}_1 = \text{Sp } \mathbf{C} = C_{11} + C_{22}, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{I}_2 = \text{Det } \mathbf{C} = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}. \quad (5.50)$$

Wie alle Verzerrungstensoren ist auch der Cauchy-Green-Tensor eindeutig bestimmt durch den Deformationsgradienten \mathbf{D} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}. \quad (5.51)$$

Der Deformationsgradient beschreibt die Deformation einer kleinen Umgebung eines Punktes, welche von der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration übergeht. Sollen dabei allgemeine Referenzkonfigurationen betrachtet werden können, wie hier der Fall, so ist die von Jacquotte [Jac88] verwendete vereinfachte Form des Deformationsgradienten nicht mehr geeignet. Die Komponenten des Deformationsgradienten ergeben sich für den allgemeinen Fall zu:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 1 + a_\xi \xi_{,X} + a_\eta \eta_{,X}, & D_{12} &= a_\xi \xi_{,Y} + a_\eta \eta_{,Y}, \\ D_{21} &= b_\xi \xi_{,X} + b_\eta \eta_{,X}, & D_{22} &= 1 + b_\xi \xi_{,Y} + b_\eta \eta_{,Y}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die Energiedichte h hängt offensichtlich nur vom Verschiebungsfeld ab. Dies wird noch deutlicher, wenn die Invarianten \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 als Funktion des Deformationsgradienten ausgedrückt werden:

$$\mathcal{I}_1 = \text{Sp}(\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}) = D_{11}^2 + D_{12}^2 + D_{21}^2 + D_{22}^2, \quad (5.53)$$

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{J}^2 \quad \text{mit} \quad \mathcal{J} = \text{Det } \mathbf{D} = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}. \quad (5.54)$$

Jacquotte [Jac88, Jac94] weist darauf hin, dass eine Energiedichte, welche der Gleichung 5.48 genügt, “blind” ist gegenüber Gitterzellen mit negativem Volumen, sofern diese aus einer Starrkörperbewegung hervorgehen, bei der sich ein Rechtssystem in ein Linkssystem umwandelt (oder umgekehrt). Dieser “Schönheitsfehler” lässt sich aber auf einfache Weise beheben, indem \mathcal{J} anstelle von \mathcal{I}_2 zur Konstruktion der Energiedichte verwendet wird:

$$h = h(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}). \quad (5.55)$$

Im Folgenden wird \mathcal{I}_2 nicht mehr auftreten. Deshalb wird zur Vereinfachung der Schreibweise von nun an die erste Invariante \mathcal{I}_1 mit \mathcal{I} bezeichnet.

Zusätzliche Einschränkungen für die Auswahl einer geeigneten Energiedichtefunktion ergeben sich aus der Bedingung, dass die Energiedichte im undeformierten Zustand ein Minimum annehmen muss. Dies schließt z. B. alle Funktionen aus, die nicht lokal konvex sind [Jac88]. Darüberhinaus konzentriert sich die Suche nach einer geeigneten Funktion naturgemäß auf möglichst einfache Ansätze. Die Energiedichtefunktion,

welche Jacquotte schließlich seinen zahlreichen Arbeiten auf dem Gebiet der Gittergenerierung und -optimierung (vgl. [Jac88, Jac91, JC92, Jac94]) zu Grunde legt lautet:

$$h = g[(\mathcal{I} - 2\mathcal{J}) + (\mathcal{J} - 1)^2]. \quad (5.56)$$

Jacquotte gibt ihr den Vorzug vor anderen möglichen Formeln, unter anderem weil für sie eine einfache geometrische Deutung möglich ist. Die Aufgabe nach dem Minimum einer mittels Gleichung 5.56 gebildeten Energiefunktion zu suchen, kann aufgefasst werden als ein lineares Quadratmittelproblem von der Forderung, dass die Verschiebung \mathbf{w} eine Starrkörperbewegung sein soll [Jac94]. Die Gewichtsfunktion g ermöglicht — ähnlich wie der E -Modul beim linear-elastischen Modell — eine teilweise Kontrolle über die Verzerrungsverteilung. Neben der Gleichung 5.56 soll im Rahmen dieser Arbeit auch eine vereinfachte Funktion betrachtet werden, bei der der quadratische Term, welcher eigentlich die Aufgabe hat, die Entstehung negativer Volumenzellen zu verhindern, weggelassen wird:

$$h^* = g(\mathcal{I} - 2\mathcal{J}). \quad (5.57)$$

Eine Energiefunktion, welche auf Gleichung 5.57 basiert, liefert für $g = 1$ dieselbe Lösung wie die Laplace-Gleichung. Dies wird offensichtlich wenn h^* mit Hilfe der Gleichungen 5.52, 5.53 und 5.54 umgeformt wird zu:

$$h^* = g[(a_{\cdot x} - b_{\cdot y})^2 + (a_{\cdot y} + b_{\cdot x})^2]. \quad (5.58)$$

Das lineare Quadratmittelproblem, welches sich hieraus ergibt, ist für $g = 1$ äquivalent zu den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und damit auch zur Laplace-Gleichung.

Die im Körper gespeicherte potentielle Energie ergibt sich durch Integration der Energiedichte über das gesamte Gebiet.

$$H = \frac{1}{2} \iint_{\eta \xi} h J d\xi d\eta \quad \text{bzw.} \quad H^* = \frac{1}{2} \iint_{\eta \xi} h^* J d\xi d\eta. \quad (5.59)$$

Die Herleitung des Gradienten $\nabla_{\mathbf{w}} H$ sowie der Vorkonditionierungsmatrix \mathbf{P} verläuft analog zu der im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Vorgehensweise. Der Gradient setzt sich beim hyperelastischen Modell mit h aus den folgenden Ausdrücken zusammen:

$$h_{\dot{a}} = (D_{11} - D_{22}) \xi_{\cdot x} + (D_{12} + D_{21}) \xi_{\cdot y} + (D_{22}\xi_{\cdot x} - D_{21}\xi_{\cdot y}) (\mathcal{J} - 1), \quad (5.60)$$

$$h_{\dot{a}} = (D_{11} - D_{22}) \eta_{\cdot x} + (D_{12} + D_{21}) \eta_{\cdot y} + (D_{22}\eta_{\cdot x} - D_{21}\eta_{\cdot y}) (\mathcal{J} - 1), \quad (5.61)$$

$$h_{\dot{b}} = -(D_{11} - D_{22}) \xi_{\cdot y} + (D_{12} + D_{21}) \xi_{\cdot x} + (D_{11}\xi_{\cdot y} - D_{12}\xi_{\cdot x}) (\mathcal{J} - 1), \quad (5.62)$$

$$h_{\dot{b}} = -(D_{11} - D_{22}) \eta_{\cdot y} + (D_{12} + D_{21}) \eta_{\cdot x} + (D_{11}\eta_{\cdot y} - D_{12}\eta_{\cdot x}) (\mathcal{J} - 1). \quad (5.63)$$

Die zur Konstruktion der Vorkonditionierungsmatrix benötigten Ableitungen zweiter Ordnung ergeben sich in diesem Fall zu:

$$h_{\acute{a}\acute{a}} = \xi_{\cdot x}^2 + \xi_{\cdot y}^2 + (D_{22}\xi_{\cdot x} - D_{21}\xi_{\cdot y})^2, \quad (5.64)$$

$$h_{\grave{a}\grave{a}} = \eta_{\cdot x}^2 + \eta_{\cdot y}^2 + (D_{22}\eta_{\cdot x} - D_{21}\eta_{\cdot y})^2, \quad (5.65)$$

$$h_{\acute{b}\acute{b}} = \xi_{\cdot y}^2 + \xi_{\cdot x}^2 + (D_{11}\xi_{\cdot y} - D_{12}\xi_{\cdot x})^2, \quad (5.66)$$

$$h_{\grave{b}\grave{b}} = \eta_{\cdot y}^2 + \eta_{\cdot x}^2 + (D_{11}\eta_{\cdot y} - D_{12}\eta_{\cdot x})^2. \quad (5.67)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die zweite Variante der Energiedichte (Gleichung 5.57) erhält man, indem in den Gleichungen 5.60 bis 5.67 jeweils der letzte Klammerterm gleich Null gesetzt wird. Für die vereinfachte Form der Energiedichte, h^* , ergibt sich wieder ein linearer Zusammenhang zwischen dem Gradienten $\nabla_{\mathbf{w}} H^*$ und der Schrittweite $\lambda^{(k)}$, so dass hier zwei Funktionsauswertungen zur Bestimmung von $\lambda^{(k)}$ genügen. Anders verhält es sich für den Fall, dass die Energiedichte gemäß Gleichung 5.56 verwendet wird. Aus den Gleichungen 5.52, 5.54 und 5.56 folgt, dass der funktionale Zusammenhang zwischen dem Gradienten $\nabla_{\mathbf{w}} H$ und der Schrittweite durch ein Polynom dritten Grades gegeben ist. Um die Koeffizienten dieses Polynoms zu bestimmen, sind vier Funktionsauswertungen notwendig. Die Berechnung der Nullstellen des Polynoms basiert auf der Lösung eines kleinen Eigenwertproblems. Diese äußerst robuste Methode ist in [Pea92] näher beschrieben. Es kann davon ausgegangen werden, dass das Polynom in der Regel nur eine Nullstelle hat [Jac88]. Falls dies einmal nicht zutrifft, wird von den ermittelten Nullstellen jene ausgewählt, für die die Energiedichte den kleinsten Wert annimmt.

Tabelle 5.1: *Grundlegende Eigenschaften der Methoden*

	Klassifikation	Lösung	Beschränkung auf 2D	Beschränkung auf strukturierte Gitter
TFI	algebraisch	—	nein	ja
LAGL	differentiell	lin. Gl.-system	nein	nein
DIGL	differentiell	lin. Gl.-system	nein	nein
FAM	Struktur- analogie	lin. Gl.-system bzw. Minimierung	nein	nein
LEM	Struktur- analogie	lin. Gl.-system bzw. Minimierung	nein	nein
HEM	Struktur- analogie	Minimierung	nein (vgl. Anhang B)	nein (vgl. [Wic01])
HEM*	Struktur- analogie	Minimierung	nein (vgl. Anhang B)	nein (vgl. [Wic01])

6 Beispiele dynamischer Gitter

In diesem Kapitel sollen die verschiedenen Methoden zur Gitternachführung hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen werden. Im Mittelpunkt steht dabei zunächst die Frage, inwieweit sie dazu in der Lage sind, bei der Anpassung des Gitters an eine veränderte Berandung die Gitterqualität zu erhalten. Die in Abschnitt 6.1 durchgeführte Deformationsanalyse kann darauf teilweise eine Antwort geben. In den darauffolgenden Abschnitten wird die Eignung für praxisrelevante Anwendungen untersucht. Neben der Gitterqualität steht dabei vor allem der Rechenzeitbedarf der Methoden im Vordergrund.

6.1 Deformationsanalyse

Ein fundamentales Theorem der Kontinuumstheorie besagt, dass sich eine allgemeine Deformation lokal immer in Translations-, Rotations- und Verzerrungsanteil zerlegen lässt [Eri62]. Um der Frage auf den Grund zu gehen, wie sich die Methoden bei einer allgemeinen Deformation verhalten, muss ihr Verhalten für die elementaren Deformationszustände näher untersucht werden. Eine erste, naheliegende Forderung ist, dass Starrkörperbewegungen des Gitters korrekt wiedergegeben werden müssen. Damit ist gemeint, dass bei Verschiebungen des Randes, die eine Starrkörperbewegung des gesamten Gebietes zulassen, das gesamte Gitter auch tatsächlich eine Starrkörperbewegung vollführt. Die Starrkörpertranslation ist in dieser Hinsicht unproblematisch; eine eingehendere Analyse verlangt jedoch die Starrkörperrotation. Eine starre Rotation des gesamten Gebietes wird beschrieben durch:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{X}. \quad (6.1)$$

Den orthogonalen Tensor $\boldsymbol{\alpha}$ bezeichnet man als Drehtensor. Aus Gleichung 5.7 folgt daraus für den Verschiebungsvektor:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} = (\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{X}. \quad (6.2)$$

Es ist nun zu überprüfen, ob bzw. unter welchen Bedingungen die einzelnen Methoden diese exakte Lösung reproduzieren. Mit Blick auf seine Herleitung kann diese Frage für das Hyperelastische Modell sofort mit ja beantwortet werden. Der Verschiebungsvektor nach Gleichung 6.2 genügt auch der Laplace-Gleichung. Das ist sofort einzusehen, wenn man berücksichtigt, dass $\nabla \mathbf{X} = \boldsymbol{\delta}$ gilt und $\boldsymbol{\delta}$ sowie $\boldsymbol{\alpha}$ unabhängig von \mathbf{X} sind. Die

Laplace-Gleichung liefert somit ebenfalls für beliebige Drehwinkel die exakte Lösung. Anders sieht es bei der Diffusionsgleichung 5.9 aus. Um das zeigen zu können, muss sie zunächst mit Hilfe der Produktregel umgeformt werden:

$$\nabla \cdot (k \nabla \mathbf{w}) = \nabla k \cdot \nabla \mathbf{w} + k \nabla^2 \mathbf{w} = 0. \quad (6.3)$$

Wird die Gleichung 6.2 darin eingesetzt, so ist der zweite Summand wieder Null, während sich für den ersten Summanden ergibt:

$$\nabla k \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\delta}) = 0. \quad (6.4)$$

Dies ist ein lineares, homogenes Gleichungssystem für die Komponenten des Gradienten ∇k . Diese Komponenten sind jedoch nicht Unbekannte, welche in Abhängigkeit der Koeffizienten des Gleichungssystems zu bestimmen sind, sondern vorgegebene Größen. Damit Gleichung 6.4 auf jeden Fall erfüllt ist, müssen folglich alle Koeffizienten verschwinden, also:

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\delta} = 0. \quad (6.5)$$

Betrachtet man eine Rotation um die Z -Achse mit dem Rotationswinkel α , so lautet diese Gleichung im kartesischen Koordinatensystem:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.6)$$

Diese Bedingung ist nur für $\alpha = 0$ erfüllt. Die Diffusionsgleichung 5.9 ist also nicht in der Lage, eine Starrkörperrotation richtig wiederzugeben.

Die Analyse des linear-elastischen Modells erfolgt zweckmäßigerweise auf der Grundlage der Navier'schen Gleichung 5.28. Durch Anwendung der Produktregel ergibt sich:

$$\nabla \cdot [E(\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla)] = \nabla E \cdot (\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla) + E(\nabla^2 \mathbf{w} + \nabla \cdot \mathbf{w} \nabla) = 0. \quad (6.7)$$

Wird die Gleichung 6.2 darin eingesetzt, so verschwindet der zweite Klammerterm. Für den verbleibenden Ausdruck findet man:

$$\nabla E \cdot (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T - 2\boldsymbol{\delta}) = 0. \quad (6.8)$$

Damit die Gleichung 6.8 für einen frei wählbaren E -Modul erfüllt ist, muss gelten:

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T - 2\boldsymbol{\delta} = 0. \quad (6.9)$$

Dies führt schließlich auf die Bedingung:

$$2 \cos \alpha - 2 = 0. \quad (6.10)$$

Sie ist näherungsweise erfüllt für kleine α , da dann $\cos \alpha \approx 1$. Die Gleichung 5.28 ist also in der Lage, kleine Starrkörperbewegungen annähernd richtig wiederzugeben.

Die Analyse kann auch für das Federanalogie-Modell durchgeführt werden. Dazu wird der Verschiebungsvektor gemäß Gleichung 6.2 in die Gleichung 5.23 eingesetzt. Berücksichtigt man, dass die Ableitung der Energiefunktion im Minimum gleich Null ist, so ergibt sich:

$$(\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{l_{ij}^n} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) = 0 \quad \forall \quad i \in \mathcal{V}. \quad (6.11)$$

Der Summenausdruck verschwindet nur, wenn das ganze Gebiet von geraden Koordinatenlinien überdeckt ist und der Exponent n gleich Eins gesetzt wird, da sich in diesem Fall die Beiträge von gegenüberliegenden Nachbarpunkten gegenseitig aufheben. Dies ist natürlich eine nicht zu erfüllende Forderung an die räumliche Diskretisierung. Folglich muss der Klammerausdruck, der außerhalb der Summe steht, verschwinden. Das führt wiederum auf die Bedingung 6.6. Das Federanalogie-Modell ist also nicht in der Lage, eine Starrkörperrotation richtig wiederzugeben.

Die Transfinite Interpolation ist eine lineare Abbildung, welche formal beschrieben wird durch

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{w}_R), \quad (6.12)$$

wobei der Index “R” die auf dem Rand gegebene Größe bezeichnet. Bei einer starren Rotation des Randes gilt natürlich

$$\mathbf{w}_R = (\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{X}_R. \quad (6.13)$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}(\mathbf{X}_R) \quad (6.14)$$

findet man, ausgehend von Gleichung 6.12,

$$\mathbf{w} \stackrel{(6.13)}{=} \mathbf{T}[(\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{X}_R] \stackrel{(*)}{=} (\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{X}_R) \stackrel{(6.14)}{=} (\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{X}. \quad (6.15)$$

Die mit (*) gekennzeichnete Gleichheit folgt aus der Linearität der Abbildung \mathbf{T} . Die Gleichung 6.14 besagt nichts anderes, als dass auch das Ausgangsgitter mit Hilfe der Transfiniten Interpolation erzeugt worden ist. Sie erweist sich als notwendige Bedingung dafür, dass die exakte Lösung reproduziert wird.

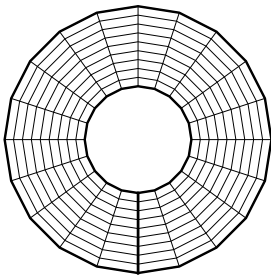


Abbildung 6.1: Ausgangsgitter für Lochscheibe

Diese theoretischen Ergebnisse sollen nun anhand eines einfachen Testfalles verifiziert werden. Dazu betrachten wir eine Lochscheibe mit einem Verhältnis zwischen äußerem Radius r_a und innerem Radius r_i von 2,5. In der Abbildung 6.1 ist das Ausgangsgitter dargestellt. Es besteht aus 10×20 Gitterpunkten, welche in radialer und in Umfangsrichtung gleichmäßig verteilt sind. Aufgrund der gewählten H-Topologie gibt es eine interne Blockgrenze, welche, ebenso wie der Rand, durch eine größere Strichstärke hervorgehoben

en ist. Es wird sowohl der innere als auch der äußere Rand um 40° im Uhrzeigersinn gedreht. Die verschiedenen Methoden zur Gitternachführung sollten zu diesen vorgegebenen Randbedingungen ein Verschiebungsfeld liefern, das einer Starrkörperrotation der ganzen Lochscheibe entspricht. Die korrekte Lösung erhält man erwartungsgemäß mit der Laplace-Gleichung, dem Hyperelastischen Modell und der Transfiniten Interpolation. Sie ist in Abbildung 6.2a dargestellt. Sowohl bei der Diffusionsgleichung als

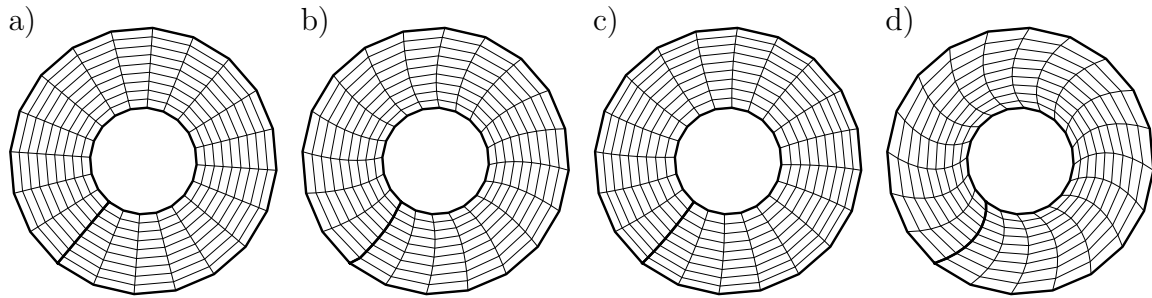


Abbildung 6.2: Anpassung des Gitters bei Verdrehung beider Ränder um 40° im Uhrzeigersinn; a) korrekte Lösung, b) Diffusionsgleichung, c) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-2}$, d) Federanalogie-Modell mit $n = 1$

auch beim Federanalogie-Modell geht dagegen die Orthogonalität der Gitterlinien verloren (vgl. Abbildung 6.2b und d). Das linear-elastische Modell liefert ebenfalls nicht die korrekte Lösung. In der Abbildung 6.2c ist eine schwache Krümmung der radialen Gitterlinien zu erkennen. Wird ein etwas kleinerer Drehwinkel gewählt, so bleiben die radialen Koordinatenlinien praktisch gerade. Erst bei wesentlich größeren Drehwinkeln tritt der Fehler deutlich in Erscheinung. Diese Beobachtungen bestätigen die eingangs durchgeführte theoretische Analyse.

Neben der korrekten Wiedergabe von Starrkörperrotationen ist eine zweite fundamentale Forderung an die Methoden zur Gitternachführung, dass sie dazu in der Lage sind, den bei einer allgemeinen Deformation auftretenden Verzerrungsanteil gleichmäßig auf alle Gitterzellen zu verteilen. Andernfalls würden hohe lokale Verzerrungskonzentrationen das Gitter unbrauchbar machen. Um dieses Problem näher zu untersuchen, wird wieder die Lochscheibe aus Abbildung 6.1 betrachtet. Dieses Mal wird jedoch nur der äußere Rand um 40° im Uhrzeigersinn gedreht während der innere Rand fest bleibt. Die Abbildung 6.3 zeigt die entsprechenden Gitter für die vier Methoden, welche beim vorangehenden Testfall gut abgeschnitten haben. Eine Voraussetzung dafür, die TFI hier einsetzen zu können, ist die Klärung der Frage nach einer adäquaten Behandlung der internen Blockgrenze. Üblicherweise wird die Verschiebung interner Blockgrenzen aus den ihnen zugeordneten Ecken interpoliert, wodurch sich das Problem dahingehen verlagert, die Bewegung der entsprechenden Ecken sinnvoll vorzugeben. In dieser Arbeit soll jedoch ein anderer Weg beschritten werden. Als Grundmodell dient hierbei das Hyperelastische Modell mit h^* (HEM*) und $g = J^{-2}$. Wie in Abschnitt 5.3 ausführlich dargelegt wurde, ist bei den Strukturanalogie-Modellen ein Minimierungsproblem zu

lösen, bei dem die Verschiebungen der Gitterpunkte als Unbekannte auftreten. Werden die Verschiebungen im Innern eines Blockes nun mit Hilfe der TFI durch jene der Blockränder ausgedrückt, so verbleiben nur noch die Verschiebungen der internen Blockgrenzen als Freiheitsgrade. Es ist zu erwarten, dass mit der Reduzierung der Dimension des Minimierungsproblems auch eine schnellere Konvergenz des numerischen Verfahrens einhergeht. Die Steigerung der Effizienz sowie die Abstriche, welche möglicherweise hinsichtlich der Gitterqualität gemacht werden müssen, hängen von Anzahl und Lage der internen Blockgrenzen ab. Wie in der Abbildung 6.3a zu erkennen ist, führt der hier vorgestellte kombinierte Ansatz dazu, dass die radialen Gitterlinien auch nach der Verdrehung des äußeren Randes gerade verlaufen. Gekrümmte Gitterlinien

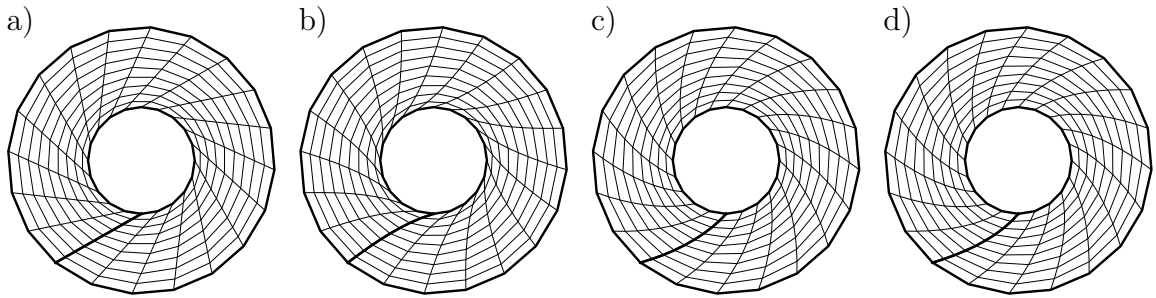


Abbildung 6.3: Anpassung des Gitters bei Verdrehung des äußeren Randes um 40° im Uhrzeigersinn; a) Transfinite Interpolation + HEM* mit $g = J^{-2}$, b) Laplace-Gleichung, c) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-2}$, d) Hyperelastisches Modell mit h und $g = J^{-2}$

weist hingegen das Gitter auf, welches mit Hilfe der Laplace-Gleichung an den gedrehten Rand angepaßt wurde. Während sich die Winkel im äußeren Bereich nur wenig ändern, ist der innere Bereich dafür umso stärker verformt. Für diesen einfachen Fall kann die Laplace-Gleichung auch analytisch gelöst werden. Um die Rotationssymmetrie des Problems ausnutzen zu können, ist eine Transformation in Polarkoordinaten erforderlich. Die daraus resultierende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung kann durch mehrere geschickte Substitutionen auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt und anschließend mit Standardmethoden gelöst werden. Der Winkel zwischen den Koordinatenlinien $\mathbf{x}(\xi = \text{const.}, \eta)$ und $\mathbf{x}(\xi, \eta = \text{const.})$ ist für die analytische Lösung der Laplace-Gleichung in den Diagrammen der Abbildung 6.4 als durchgezogene Linie (LAGL analytisch) eingezeichnet. Zum inneren Rand hin nimmt der Winkel stark ab und wird schließlich kleiner als 20° . Bei noch stärkerer Verdrehung des äußeren Randes würde es bald zu Überschneidungen der Koordinatenlinien kommen. Dieses ungünstige Verhalten der Lösung der Laplace-Gleichung hat also nichts mit der gewählten Diskretisierung zu tun, sondern ergibt sich vielmehr aus dem Zusammenspiel von komplexer Geometrie und vorgegebenen Randbedingungen. Dieselbe Lösung liefert auch das Linear-elastische Modell (LEM) mit $E = 1$ und das Hyperelastische Modell mit h^* (HEM*) und $g = 1$. Für das HEM* wurde die Begründung dafür bereits in Abschnitt 5.3.4 gegeben. Um das Verhalten des LEMs zu erklären, ist es zweckmäßig die Navier'sche Gleichung zu betrachten. Für die hier

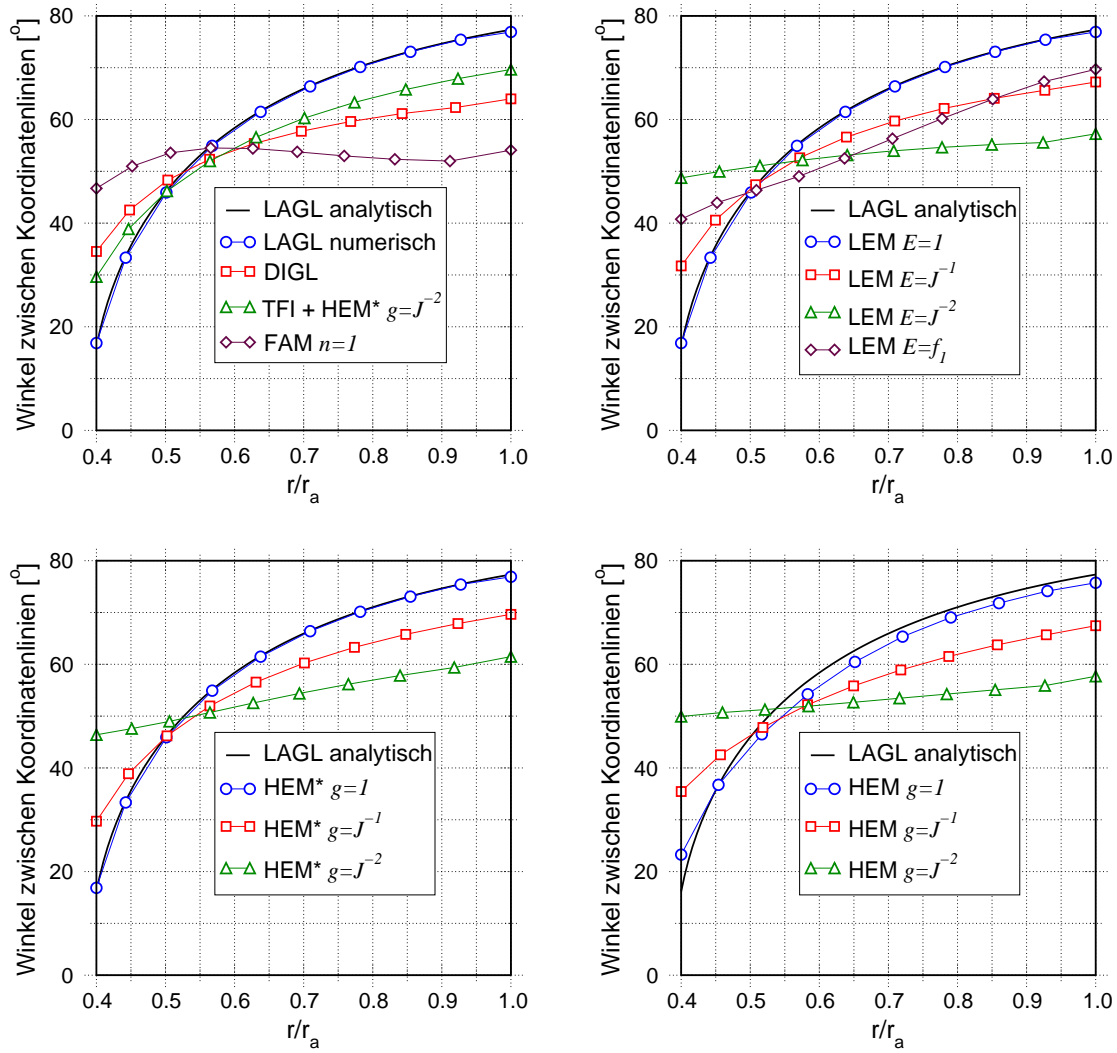


Abbildung 6.4: Testfall Lochscheibe: Winkel zwischen Koordinatenlinien über dem Radius für verschiedene Methoden

gegebene Problemstellung lässt das LEM — ein konstanter E -Modul vorausgesetzt — eine volumenerhaltende Deformation als Lösung zu. Da in diesem Fall $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ gilt [Sch95], unterscheidet sich die Navier'sche Gleichung nicht mehr von der Laplace-Gleichung und hat folglich die gleiche Lösung. Die am stärksten verzerrten Gitterzellen sind für die Qualität des gesamten Gitters maßgeblich. Daher wäre es wünschenswert, wenn der Winkel zwischen den Koordinatenlinien konstant verlaufen würde. Die Gleichverteilung der Verzerrung gelingt umso besser, je steifer die kleinen, stark verzerrten Gitterzellen am inneren Rand durch entsprechende Wahl des E -Moduls beim LEM bzw. der Gewichtsfunktion g beim HEM* und HEM gemacht werden. Der verzerrungsabhängige E -Modul ($E = f_1$) beim LEM erscheint in dieser Hinsicht ebenfalls geeignet. Die beste Gitterqualität lässt sich mit dem Hyperelastischen Modell mit der Energiedichtefunktion h (HEM) und $g = J^{-2}$ erzielen. Wie man in der Abbildung 6.4, rechts unten, erkennen kann, wird der Winkel zwischen den Gitterlinien nirgends klei-

ner als 50° . Das entsprechende Gitter ist in der Abbildung 6.3d dargestellt. Auch das Federanalogie-Modell (FAM) gehört in diesem Fall zu den Methoden, die eine gute Gleichverteilung der Verzerrungen herbeiführen. Weniger gut geeignet erscheint hingegen die Diffusionsgleichung (DIGL). Der Winkel wird am inneren Rand zwar nicht so klein wie bei der Laplace-Gleichung, er weicht aber immer noch stark vom optimalen Verlauf ab.

Dieser Abschnitt hat gezeigt, dass einigen der hier untersuchten Methoden bereits elementare Deformationszustände Probleme bereiten. Für allgemeine Deformationen, welche sich wie eingangs erwähnt aus elementaren Deformationsanteilen zusammensetzen, erscheint das HEM und das LEM (bei hinreichend kleinem Rotationsanteil an der Gesamtdeformation) am besten geeignet. Die Strukturanalogie-Modelle stehen deshalb im Mittelpunkt der weiteren Untersuchungen.

6.2 Keil in Kanal

Das erste Beispiel mit Praxisbezug ist die Flammhalter-Konfiguration von Duplantier [Dup95]. Die Abbildung 6.5a zeigt das Ausgangsgitter, bestehend aus drei strukturierten Blöcken mit insgesamt etwa 9000 Punkten. Die Konfiguration stellt einen Kanal dar, in dessen turbulenter Strömung ein Verbrennungsprozess stattfindet, welcher mit Hilfe eines keilförmigen Hindernisses stabilisiert werden soll.

Der Kanal wird hier losgelöst von dieser Anwendung betrachtet, mit dem alleinigen Ziel, die Leistungsfähigkeit der in Kapitel 5 vorgestellten Methoden eingehender zu untersuchen. Der vorangehende Abschnitt offenbarte Schwächen einiger Methoden schon bei einfachen Deformationszuständen. Es ist deshalb notwendig, sich zunächst noch einmal dem Fall der reinen Starrkörperrotation zuzuwenden. Dazu wird die gesamte Berandung des Ausgangsgitters um 180° gedreht, wobei der Mittelpunkt des Keils den Drehpunkt bildet. Ein geeignet gewähltes Maß für die Gitterqualität erweist sich zur Beurteilung der mit den unterschiedlichen Methoden erzeugten Gitter als sehr hilfreich. Da dieses Maß auch dazu verwendet werden soll, das Konvergenzverhalten darzustellen, muss es für negative Volumenzellen wohldefiniert bleiben. Damit scheiden eine Reihe der sonst gebräuchlichen Gitterqualitätskriterien (z. B. [JL97, Knu00]) von vornherein aus. Die folgende einfache Funktion genügt hingegen den gestellten Anforderungen:

$$M = \sum_{i \in \mathcal{V}} (\theta_i - \Theta_i)^2. \quad (6.16)$$

Hierin bezeichnet Θ_i den Winkel zwischen den Gitterlinien im Gitterpunkt i des Referenzgitters und θ_i den entsprechenden Winkel im deformierten Gitter. Mit der Winkeländerung $\theta_i - \Theta_i$ als Argument stellt die Funktion M ein heuristisches Maß für die Gitterverzerrung dar. Im Falle einer Starrkörperbewegung nimmt M seinen minimalen Wert Null an. In der Abbildung 6.6 ist der zeitliche Verlauf von M während des iterativen Lösungsprozesses dargestellt. Diese, wie auch alle weiteren Berechnungen,

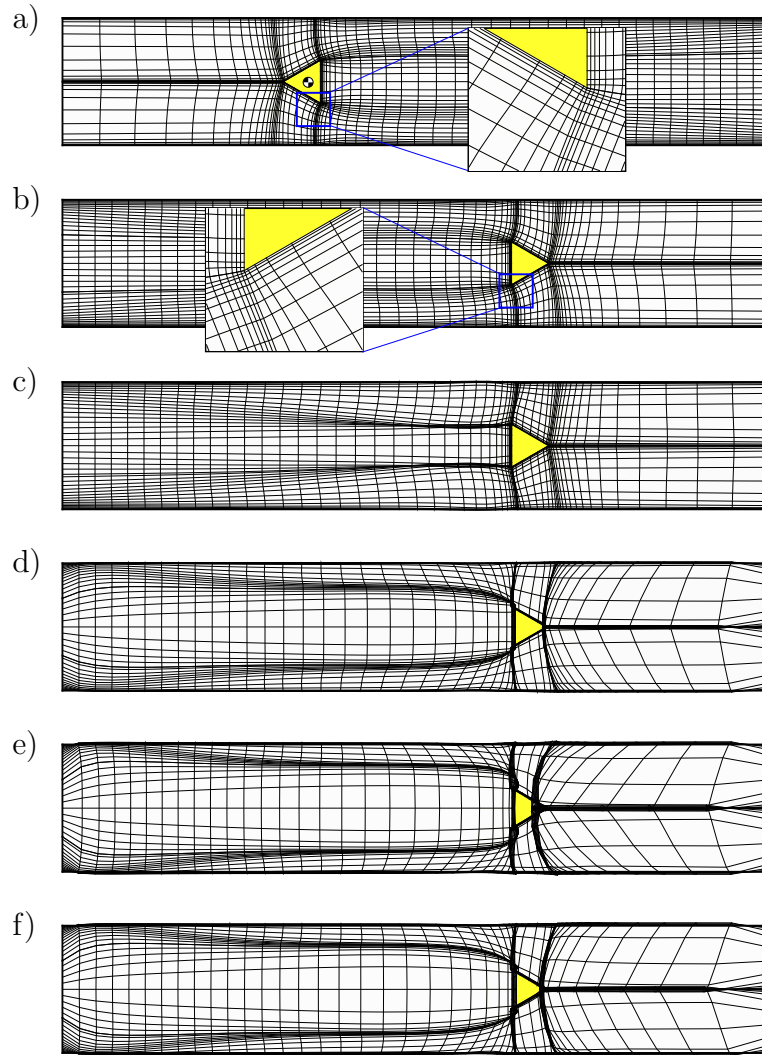


Abbildung 6.5: Gitter nach Rotation des gesamten Randes um 180° ; a) Ausgangsgitter mit Vergrößerung des Bereichs der unteren Keilecke, b) Hyperelastisches Modell mit $g = J^{-1}$, c) Transfinite Interpolation + HEM* mit $g = J^{-1}$, d) Federanalogie-Modell mit $n = 1,8$, e) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-1}$, f) Diffusionsgleichung

wurden auf einer SGI-Workstation mit MIPS R5000 Prozessor und 180 MHz Taktfrequenz durchgeführt. Das Konvergenzkriterium war $tol = 10^{-5}$. Die Abbildungen 6.5b–f zeigen die Gitter, welche von unterschiedlichen Modellen erzeugt werden. Angesichts der großen Anzahl von Gitterpunkten war es notwendig, dabei jede zweite Gitterlinie auszublenden, um eine gute Darstellung zu erhalten. Erwartungsgemäß versagen das Federanalogie-Modell, das Linear-elastische Modell und die Diffusionsgleichung bei diesem Test völlig. Beim Hyperelastischen Modell sind hingegen keine Verzerrungen des Gitters erkennbar. Es ist als einziges der hier untersuchten Verfahren dazu in der Lage, Starrkörperbewegungen des Gitters korrekt wiederzugeben. Die Transfinite Interpolation + HEM* liefert in diesem Fall kein überschneidungsfreies Gitter,

was nach der in Abschnitt 6.1 durchgeführten Deformationsanalyse auch zu erwarten war. Im Gegensatz zu allen anderen Methoden wird bei der Transfiniten Interpolation die Qualität des Ergebnisses maßgeblich von Lage und Anzahl der Blockgrenzen bestimmt. Die internen Blockgrenzen verlaufen ausgehend von der vorderen Keilecken hin zum Kanaleinlass und von den hinteren Keilecken zu den Kanalwänden. Die hier zutage tretenden Probleme könnten durch Einführung weiterer interner Blockgrenzen weitestgehend behoben werden, was jedoch im Hinblick auf die Verwendung des Gitters für die numerischen Strömungsberechnung nicht wünschenswert erscheint.

Über weitere wesentliche Eigenschaften der Methoden gibt die Abbildung 6.6 Aufschluss. Zu Beginn der Rechnung wird das Verschiebungsfeld mit Null initialisiert. Trotz dieser schlechten Startlösung verhält sich das PCG-Verfahren robust da es, im Gegensatz z. B. zum einfachen Newton-Verfahren, als global konvergenter Algorithmus konstruiert ist. Auch die zahlreichen negativen Zellvolumen, die zu Beginn der Iteration zwangsläufig auftreten, bereiten den Strukturanalogie-Modellen kein Problem. Diese positive Eigenschaft ist keineswegs selbstverständlich bei Methoden zur Gitternachführung und -optimierung [IT98, Knu99, SK01]. Besonders effizient ist das PCG-Verfahren für quadratische Funktionen. Deshalb konvergiert das Federanalogie-Modell sehr schnell. Das Hyperelastische Modell erreicht dagegen erst in der Nähe der Lösung eine vergleichbare Konvergenzrate, da im Funktional 5.59 dann die Terme höheren Grades gegenüber den quadratischen Termen an Einfluss verlieren. Es erscheint naheliegend, die Vorzüge des Federanalogie-Modells und des Hyperelastischen Modells zu verbinden. Dazu wird zunächst mit Hilfe des Federanalogie-Modells eine gute Näherung für die Lösung ermittelt, welche dann dem Hyperelastischen Modell als Startlösung dient. Wie man in der Abbildung 6.6 sehen kann, reduziert sich in diesem Fall der Rechenzeitbedarf dadurch um den Faktor drei. Es existiert sowohl beim Federmodell als auch beim Linear-elastischen Modell ein zum jeweiligen Minimierungsproblem äquivalentes lineares Gleichungssystem (siehe Abschnitt 5.3) für das es effi-

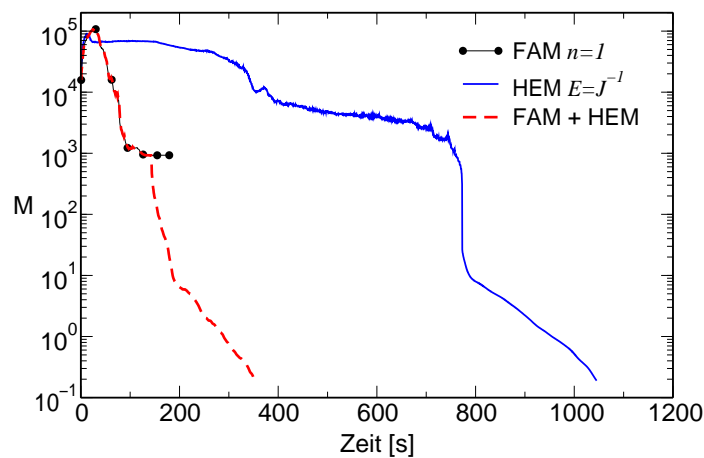


Abbildung 6.6: Verzerrungsmaß M , über Rechenzeit aufgetragen, bei Rotation des gesamten Randes um 180°

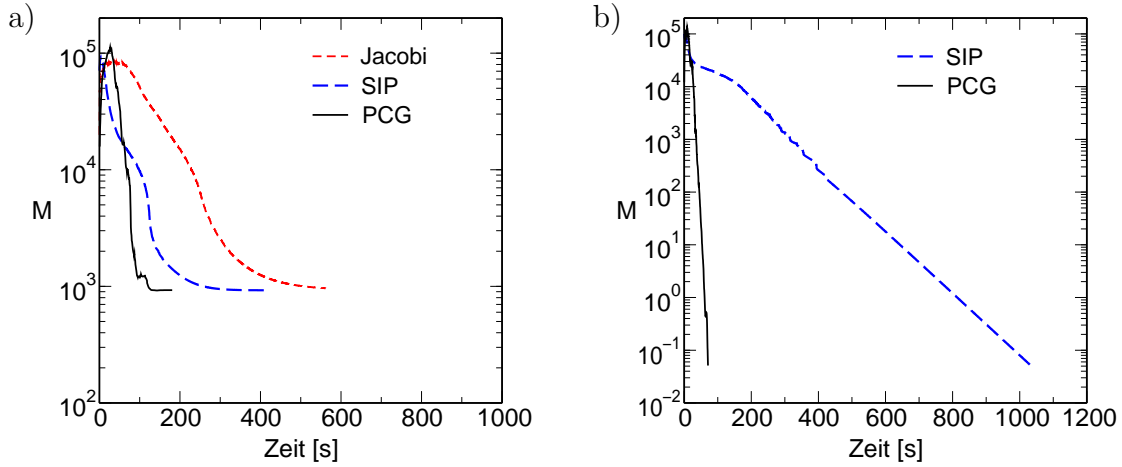


Abbildung 6.7: Verzerrungsmaß M , über Rechenzeit aufgetragen, für verschiedene Lösungsmethoden bei Rotation des gesamten Randes um 180° ; a) Federanalogie-Modell mit $n = 1$, b) Linear-elastisches Modell mit $E = 1$

ziente Lösungsalgorithmen gibt, z. B. die in Abschnitt 3.6 beschriebene ‘Semi Implicit Procedure’ (SIP). Der SIP-Algorithmus eignet sich nur für strukturierte Gitter. Vielfach kommt deshalb auch das einfache Jacobi-Verfahren zum Einsatz, welches, ebenso wie auch der Minimierungsalgorithmus, bei allen erdenklichen Gitterarten verwendet werden kann. Anhand des zeitlichen Verlaufs des Verzerrungsmaßes M , dargestellt in Abbildung 6.7, wird die Effizienz des PCG-Algorithmus deutlich. Er beansprucht wesentlich weniger Rechenzeit als die beiden anderen Verfahren. Beim Linear-elastischen Modell ist der Unterschied besonders groß. Dies ist darauf zurückzuführen, dass beim SIP-Algorithmus manche Terme des Gleichungssystems explizit behandelt werden, was eine Verschlechterung der Konvergenzrate zur Folge hat. Aus der Abbildung 6.7b geht auch hervor, dass das Linear-elastische Modell mit $E = 1$ die korrekte Lösung liefert, während es dies mit $E = J^{-1}$, wie in Abbildung 6.5d zu sehen, nicht tut. Die Erklärung für dieses Verhalten liefert die Gleichung 6.8. Wie man sofort erkennt, ist sie für einen konstanten E -Modul erfüllt. Leider wird ein konstanter E -Modul den Anforderungen hinsichtlich einer gleichmäßigen Verzerrungsverteilung nicht gerecht. Dies wird beim nun folgenden Beispiel deutlich.

Im Gegensatz zur Starrkörperrotation der gesamten Berandung, die eine Betrachtung rein akademischer Natur darstellt, hat eine Bewegung des Keils im feststehenden Kanal einen gewissen Anwendungsbezug. Eine oszillierende Drehbewegung des Keils könnte beispielsweise dazu dienen, eine sich im Nachlauf ausbildende Kármánsche Wirbelstraße zu beeinflussen. In diese Richtung zielt auch der nun durchgeführte Test, bei dem der Keil um 30° im Uhrzeigersinn ausgelenkt wird. Die Abbildung 6.8 zeigt für unterschiedliche Methoden den kritischen Bereich des Gitters nach der Deformation, wobei wiederum jede zweite Gitterlinie ausgeblendet wurde. Die Laplace-Gleichung (vgl. Abbildung 6.8a) liefert ein Verschiebungsfeld mit hohen Verzerrungskonzentrationen an den Keilecken, was Überschneidungen benachbarter Gitterlinien zur Folge

hat. Bei der Diffusionsgleichung hingegen erzwingt ein geeignet gewählter Koeffizient, dass die besonders gefährdeten kleinen Volumenzellen quasi eine Starrkörpertranslation vollführen und somit keine negativen Zellen auftreten. Als Manko erweist sich jedoch der Verlust der Wandorthogonalität. Dies ist, besonders in der Ausschnittsvergrößerung des Bereichs der vorderen Ecke, in der Abbildung 6.8b deutlich zu erkennen. Die Ursache dafür wurde in Abschnitt 6.1 gefunden. Das Problem ist auf das Unvermögen der Diffusionsgleichung, Starrkörperrotationen korrekt wiederzugeben, zurückzuführen. Mit dem Federanalogie-Modell verhält es sich genau gleich. Durch geschickte Wahl des Exponenten n können Überschneidungen benachbarter Gitterlinien verhindert werden, die Wandorthogonalität geht jedoch verloren. Auch die Transfinite Interpolation + HEM* hat diese Schwäche, wenngleich etwas weniger ausgeprägt.

Wie in Abschnitt 5.3.4 erläutert, liefert das Hyperelastische Modell mit h^* für $g = 1$ genau das gleiche Ergebnis wie die Laplace-Gleichung. Die Wahl der Gewichtsfunktion $g = J^{-1}$ entfaltet jedoch dieselbe positive Wirkung auf die Gitterqualität wie der Koeffizient der Diffusionsgleichung (vgl. Abbildung 6.8d), wobei es mit dem Hyperelastischen Modell sogar gelingt, die Wandorthogonalität des Gitters zu erhalten. Die Gewichtsfunktion g hat also einen sehr weitgehenden Einfluss auf die Güte des defor-

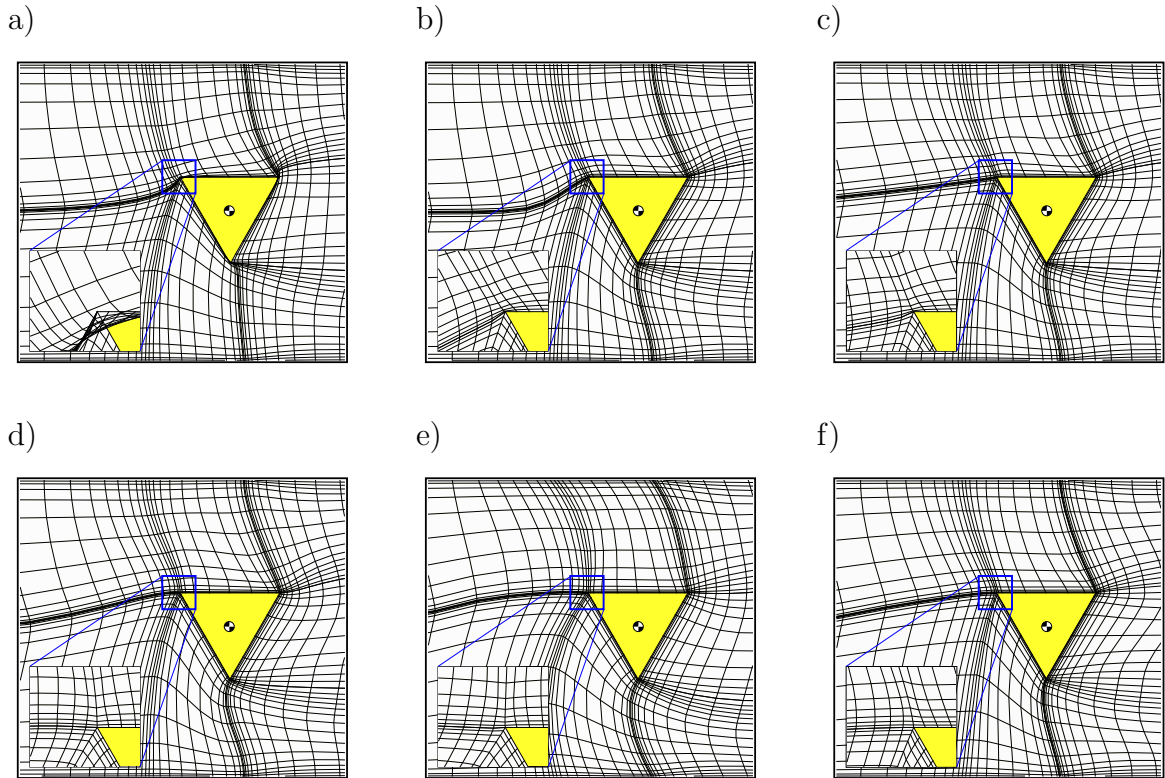


Abbildung 6.8: Gitter nach Rotation des Keils um 30° im Uhrzeigersinn; a) Laplace-Gleichung, b) Diffusionsgleichung, c) Federanalogie-Modell mit $n = 1,8$, d) Hyperelastisches Modell mit h und $g = J^{-1}$, e) Hyperelastisches Modell mit $g = h_1^{2/3}$, f) Transfinite Interpolation + HEM* mit $g = J^{-1}$

mierten Gitters. Vor diesem Hintergrund erscheint es vielversprechend, die Idee von Chianussi u. a. [CBO00] aufzugreifen. Wie in Abschnitt 5.3.3 erläutert, werden dabei die Eigenschaften des Materials durch Lösen eines strukturellen Problems bestimmt, um auf dieser Grundlage dann in einem zweiten Schritt die Gitterpunktverschiebungen zu berechnen. Die großen Verzerrungen, welche für $g = 1$ im Bereich der Keilecken auftreten, ziehen dort eine starke Konzentration der Energiedichte nach sich. Wird diese Energiedichte, zur eindeutigen Unterscheidung hier mit h_1 bezeichnet, als Gewichtsfunktion einer zweiten Berechnung verwendet, so hat dies eine nachhaltige Versteifung der zuvor noch stark verzerrten Zellen zur Folge. Das Resultat der geschilderten Vorgehensweise ist in der Abbildung 6.8e zu sehen. Der Einfluss von h_1 wurde dabei durch einen Exponenten kleiner Eins etwas gedämpft, da die Versteifung der Zellen am Keil zu Lasten der anderen Zellen geht. So sind z. B. die Zellen im Bereich der Kanalwände deutlich stärker geschert als dies bei den entsprechenden Zellen in der Abbildung 6.8d der Fall ist.

Obwohl bei dem zweistufigen Verfahren erst ein Minimierungsproblem gelöst werden muss, um h_1 zu bestimmen und dann noch ein weiteres um h zu bestimmen, ist der Re-

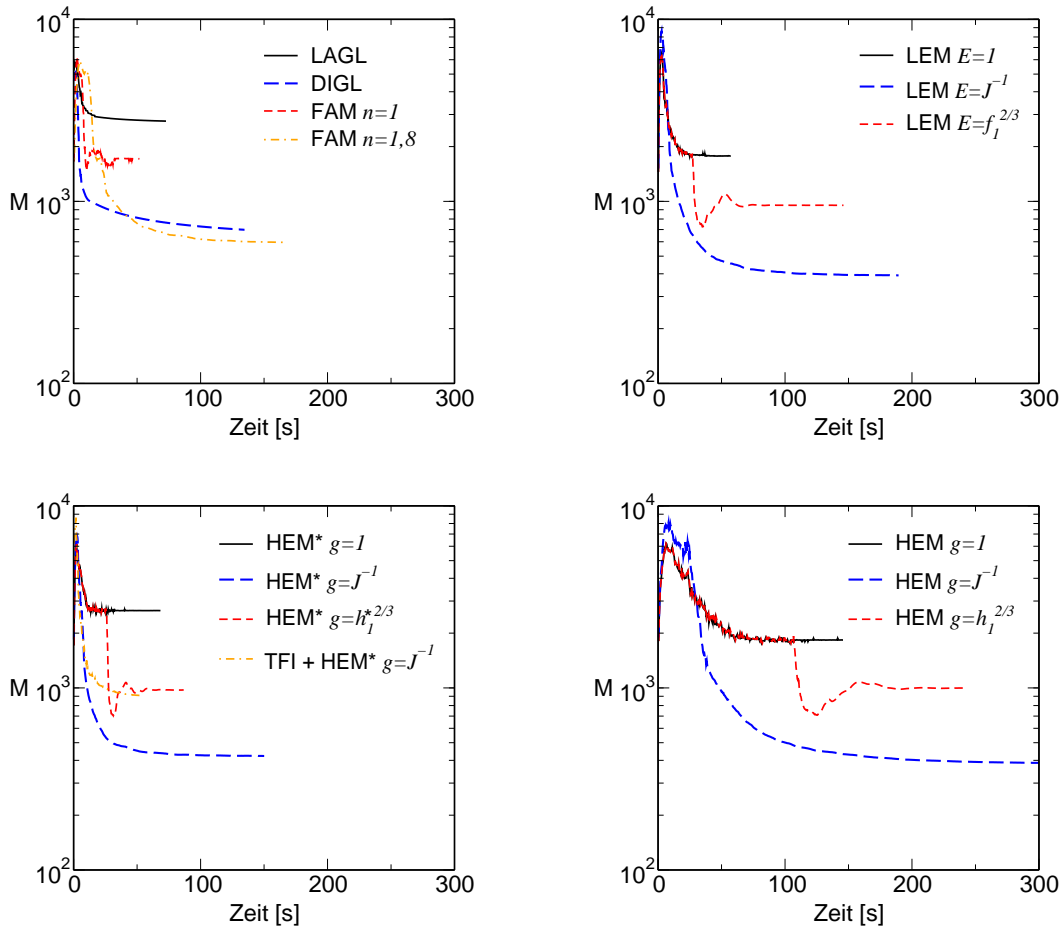


Abbildung 6.9: Verzerrungsmaß M , über Rechenzeit aufgetragen, bei Rotation des Keils um 30° im Uhrzeigersinn

chenzeitbedarf nicht größer als bei der rein geometrisch basierten Variante mit $g = J^{-1}$. Dies geht aus der Abbildung 6.9 hervor. Sowohl das Hyperelastische Modell mit vereinfachter Energiedichtefunktion h^* als auch das Linear-elastische Modell liefern bei dieser Anwendung Gitter von praktisch derselben Qualität wie das Hyperelastische Modell mit h . Die beiden Modelle beanspruchen allerdings nur etwa halb soviel Rechenzeit. Die Diffusionsgleichung, das Federanalogie-Modell und die Transfinite Interpolation + HEM* sind ebenfalls schnell, erzeugen jedoch Gitter von schlechterer Qualität. Sehr wenig Rechenzeit benötigt auch die Laplace-Gleichung. Sie hat aber den gravierenden Nachteil, dass das von ihr an die Randbewegung angepasste Gitter nicht frei von Überschneidungen benachbarter Gitterlinien ist.

6.3 Tragflügel mit beweglicher Klappe

Bei manchen Vogelarten kann beobachtet werden, wie sich, um kritische Flugzustände besser meistern zu können, die Deckfedern an der Flügeloberseite aufstellen. Das hierbei auftretende strömungsphysikalische Phänomen wurde von Schatz u. a. [SBLT00] anhand eines einfachen Modells, bestehend aus einem Tragflügel und einer an der Ob-

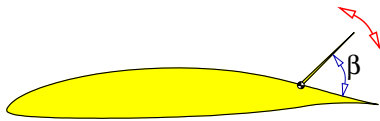
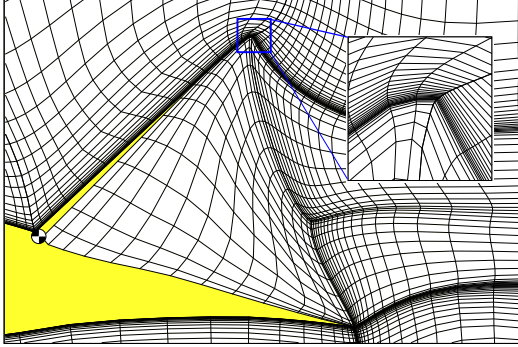


Abbildung 6.10: Skizze des Tragflügels mit beweglicher Klappe

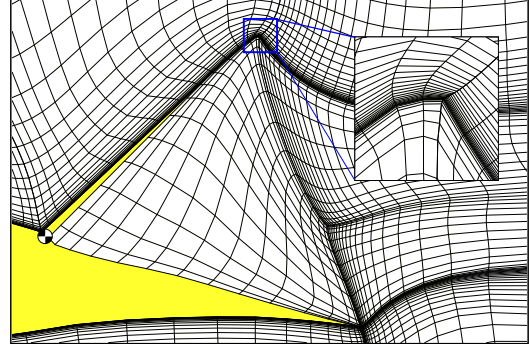
erseite montierten, frei beweglichen Klappe, numerisch untersucht. Eine Skizze dieser Konfiguration ist in der Abbildung 6.10 dargestellt. Die Topologie des aus vier strukturierten Blöcken bestehenden Gitters ist hinsichtlich der Gitternachführung anspruchsvoller als der vorhergehende Fall. Da sich hier bewegliche und feststehende Teile der Brandung in direktem Kontakt befinden, wird es schwerer, die im Gitter auftretenden Verzerrungen so über das gesamte Gebiet zu verteilen, dass die Qualität des Ausgangsgitters erhalten bleibt. Das Ausgangsgitter wurde für den Winkel $\beta = 25^\circ$ (siehe Skizze) erzeugt. Experimentelle Versuche [BMH96] führten zu der Erkenntnis, dass die Klappe die Tragflügelströmung vor allem im Bereich $10^\circ < \beta < 60^\circ$ positiv beeinflusst.

Die Abbildung 6.11 zeigt einen Ausschnitt der Gitter, welche sich mit Hilfe der verschiedenen Methoden für eine Maximalauslenkung der Klappe erzeugen lassen. Jede zweite Gitterlinie ist dabei, wie schon bei den vorangehenden Beispielen, ausgeblendet. Der kleine Ausschnitt zeigt eine nochmalige Vergrößerung des kritischsten Bereichs — der Klappenhinterkante. Die gewählten Gewichtungen, $n = 2$ beim Federanalogie-Modell und J^{-1} bei den anderen Modellen, verhindern das Auftreten von übereinander gefalteten Gitterzellen. Beim Vergleich der Ausschnittsvergrößerungen fällt auf, dass bei den drei auf kontinuumsmechanischen Grundlagen basierenden Modellen die Wandorthogonalität offensichtlich weitestgehend erhalten bleibt (Abbildungen 6.11a bis c). Bei der Transfiniten Interpolation + HEM*, dem Federanalogie-Modell und der Diffusionsgleichung treten dagegen an der Klappenoberseite Winkelabweichungen von 33° bis 35° auf. Die Abweichung ist damit annähernd proportional zum Klappenaußenlenkwinkel. Beim Linear-elastischen Modell beträgt die entsprechende Abweichung nur etwa 7° . Sie

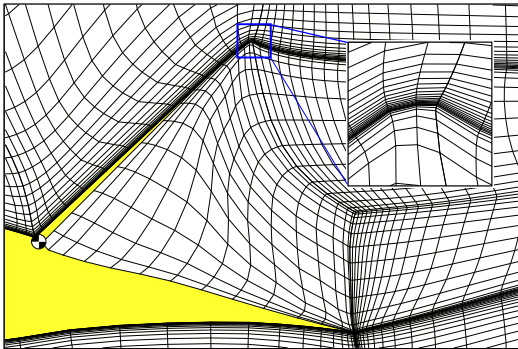
a)



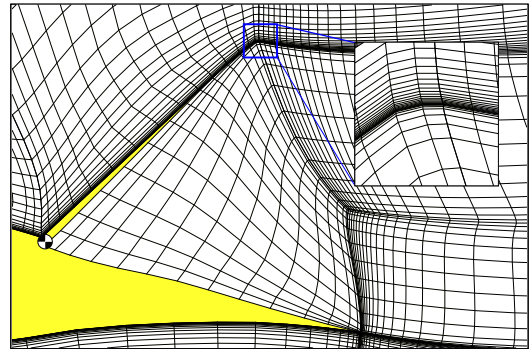
b)



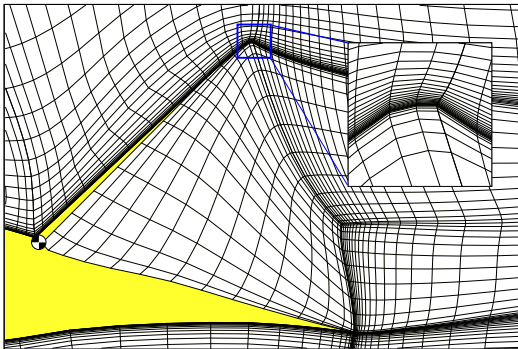
c)



d)



e)



f)

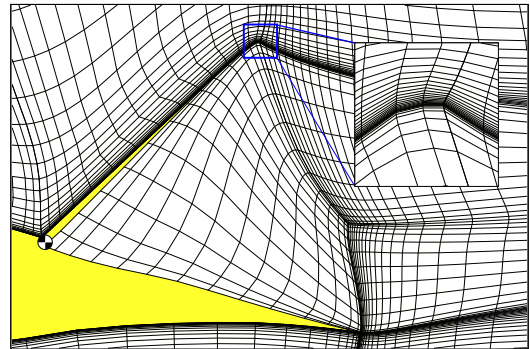


Abbildung 6.11: Gitter nach Auslenkung der Klappe um 35° entgegen des Uhrzeigersinns; a) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-1}$, b) Hyperelastisches Modell mit h und $g = J^{-1}$, c) Hyperelastisches Modell mit h^* und $g = J^{-1}$, d) Transfinite Interpolation + HEM^{*} mit $g = J^{-1}$, e) Federanalogie-Modell mit $n = 2$, f) Diffusionsgleichung

ist mit bloßem Auge praktisch nicht wahrnehmbar. Ein noch besseres Ergebnis lässt sich mit den beiden Versionen des Hyperelastischen Modells erzielen. Sie unterdrücken nahezu vollständig jegliche Verzerrung der wandnächsten Zellen. Die in den Abbildungen 6.11a und b dargestellten Gitter weisen große Ähnlichkeit auf. Bei beiden sind die Gitterlinien, welche im Ausgangsgitter von Tragflügel- bzw. Klappenhinterkante ausgehend waagrecht hin zum Auslass verlaufen, stark durchgebogen. Der dadurch hervorgerufene deutliche Knick zwischen diesen Gitterlinien und der Profilkontur kann sich sehr ungünstig auf die nachfolgende Strömungssimulation auswirken. Sowohl das Linear-elastische Modell als auch das Hyperelastische Modell mit h verhindern eine Aufweitung des zwischen den beiden Gitterlinien eingeschlossenen Bereichs. Beim Hyperelastischen Modell ist dafür der quadratische Zusatzterm, welcher in h enthalten ist, verantwortlich (Gleichung 5.56). Das Hyperelastische Modell mit h^* hingegen verfügt über keinen Mechanismus der die Veränderung der Zellgröße kontrolliert. Stattdessen versucht das Modell einer winkelerhaltenden Abbildung möglichst nahe zu kommen. Dabei entsteht ein Gitter, welches den Anforderungen der Strömungssimulation besser genügt. Auch bei dem Federanalogie-Modell und der Diffusionsgleichung ist der Knick sehr viel weniger stark ausgeprägt. Nahezu waagrecht verlaufende Gitterlinien, und damit das gewünschte Ergebnis, liefert hier jedoch nur die Transfinite Interpolation + HEM*.

Wenn die Klappe um 15° im Uhrzeigersinn gedreht wird, erweist sich die starke Verbiegung mancher Gitterlinien ebenfalls als Problem, wie man in der Abbildung 6.12 erkennen kann. Schlecht schneiden hier wieder das Linear-elastische Modell und das Hyperelastische Modell mit h ab. Bei der Transfiniten Interpolation + HEM* ergibt sich dagegen, wie auch schon bei der Auslenkung entgegen dem Uhrzeigersinn, ein knickfreier Übergang zwischen Profilkontur und Gitterlinie. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Gitterlinie keine interne Blockgrenze ist. Wäre das der Fall, würde das Gitter mehr dem in Abbildung 6.12c dargestellten gleichen. Bei allen Gittern gibt es einige Zellen zwischen Klappe und Tragflügel, die spürbar verzerrt sind. Eine stärkere Verdrehung würde zu übereinandergefalteten Gitterzellen führen, zuerst beim Federanalogie-Modell, dann auch bei den anderen Modellen. Der Spielraum, welcher sich durch die frei wählbaren Größen n , E und g ergibt, ist schnell ausgereizt, wenn sich Klappe und Tragflügel zu nahe kommen.

Bemerkenswerte Unterschiede ergeben sich beim Rechenzeitbedarf. Während das Federanalogie-Modell, die Diffusionsgleichung und das Hyperelastische Modell mit h mehrere Stunden Rechenzeit benötigen, liefert die Transfinite Interpolation + HEM* schon nach etwa drei Minuten eine auskonvergierte Lösung! Mit einem Rechenzeitbedarf von einer halben Stunde liegen das Linear-elastische Modell und das Hyperelastische Modell mit h^* zwischen diesen Extremen. Verantwortlich für die schlechte Konvergenzrate der meisten Methoden sind die Zellen mit außerordentlich großem Seitenverhältnis im Nachlaufbereich der Klappe. Es ist zu erwarten, dass diese Zellen auch bei der numerischen Strömungssimulation einen negativen Einfluss — insbesondere einen höheren Rechenzeitbedarf — haben, wodurch die schlechte Konvergenzrate der Algorithmen zur Gitternachführung wieder etwas relativiert würde.

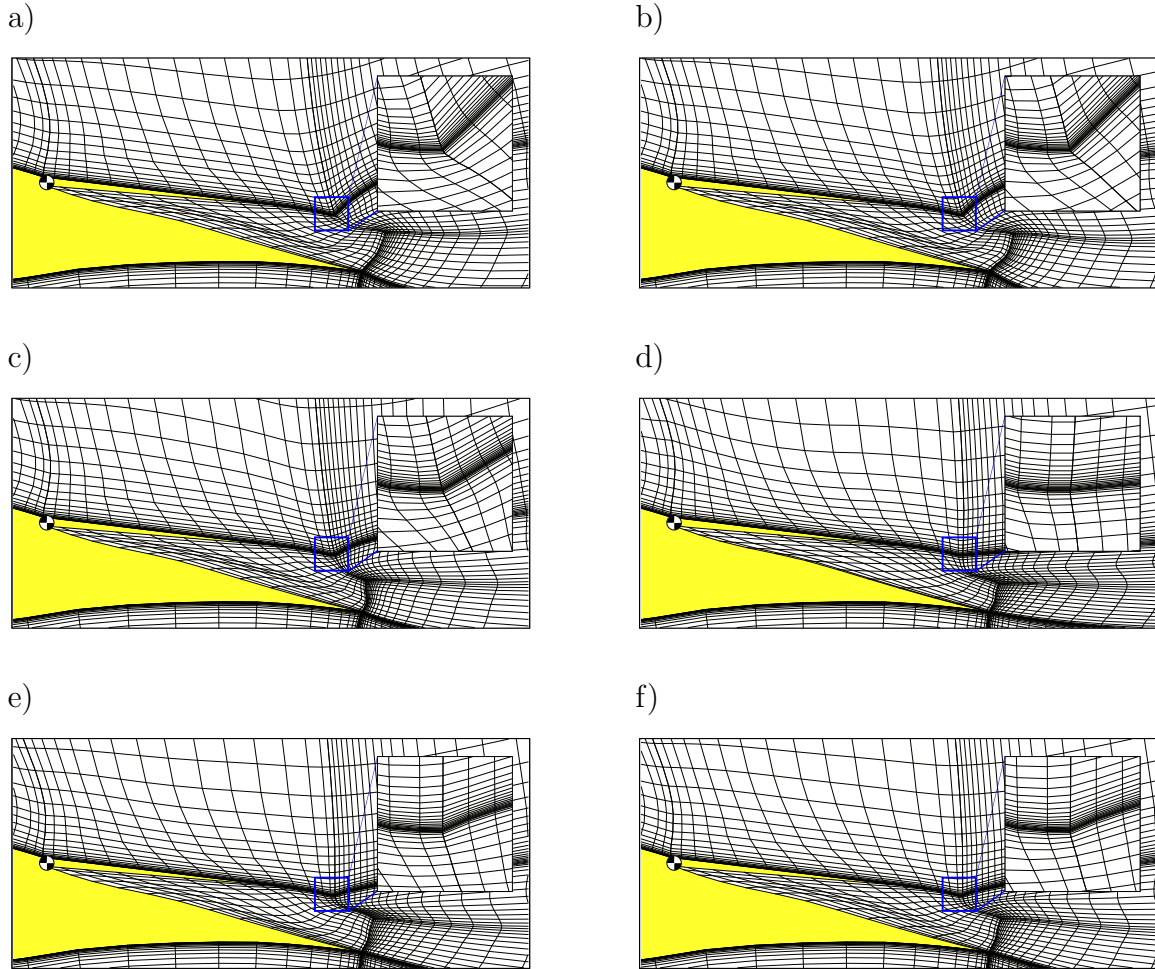


Abbildung 6.12: Gitter nach Auslenkung der Klappe um 15° im Uhrzeigersinn; a) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-1}$, b) Hyperelastisches Modell mit h und $g = J^{-1}$, c) Hyperelastisches Modell mit h^* und $g = J^{-1}$, d) Transfinite Interpolation + HEM* mit $g = J^{-1}$, e) Federanalogie-Modell mit $n = 2$, f) Diffusionsgleichung,

6.4 Zweiteiliger Tragflügel

Wie im vorangehenden Abschnitt deutlich wurde, bereiten den hier untersuchten Methoden vor allem Relativbewegungen zwischen Körpern Probleme, wenn bei der Bewegung der Körper der Abstand so klein wird, dass sie sich fast berühren. Die in Abbildung 6.13 dargestellte Hochauftriebskonfiguration eignet sich gut, um die Grenze der Anwendbarkeit der Methoden auszuloten. Das Ausgangsgitter setzt sich aus acht strukturierten Teilblöcken mit insgesamt ca. 36.000 Gitterpunkten zusammen. Durch eine Verdrehung der Klappe um 10° entgegen dem Uhrzeigersinn bei gleichzeitiger Verschiebung nach oben verringert sich der Abstand zwischen Hauptprofil und Klappe auf 15 % der ursprünglichen Spaltweite.

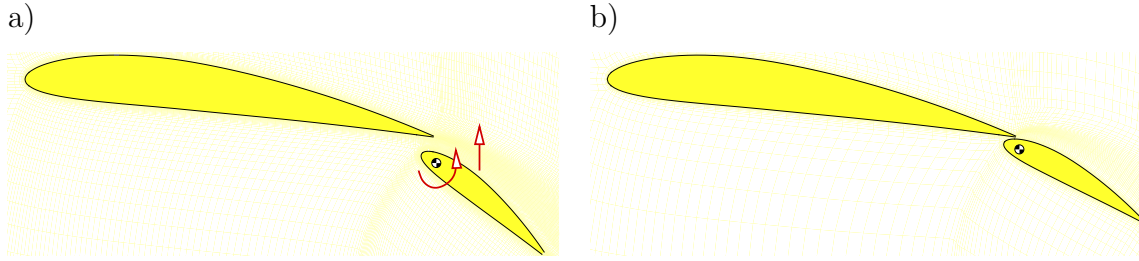


Abbildung 6.13: Skizze des zweiteiligen Tragflügels; a) Ausgangskonfiguration, b) Konfiguration nach Verschiebung der Klappe

Die Abbildung 6.14 zeigt Ausschnittsvergrößerungen des deformierten Gitters im Bereich des Spaltes, wobei wieder nur jede zweite Gitterlinie dargestellt ist. Wie man in der Abbildung 6.14a erkennen kann, treten beim Federanalogie-Modell Überschneidungen des Gitters sowohl an der Hinterkante des Hauptprofils als auch in der Mitte des Spaltes auf. Für kleinere n verschärft sich das Problem an der Hinterkante, größere n hingegen führen zu mehr invertierten Gitterzellen in der Spaltmitte. Der Exponent n erlaubt in diesem Fall nur eine unzureichende Kontrolle über die Verteilung des

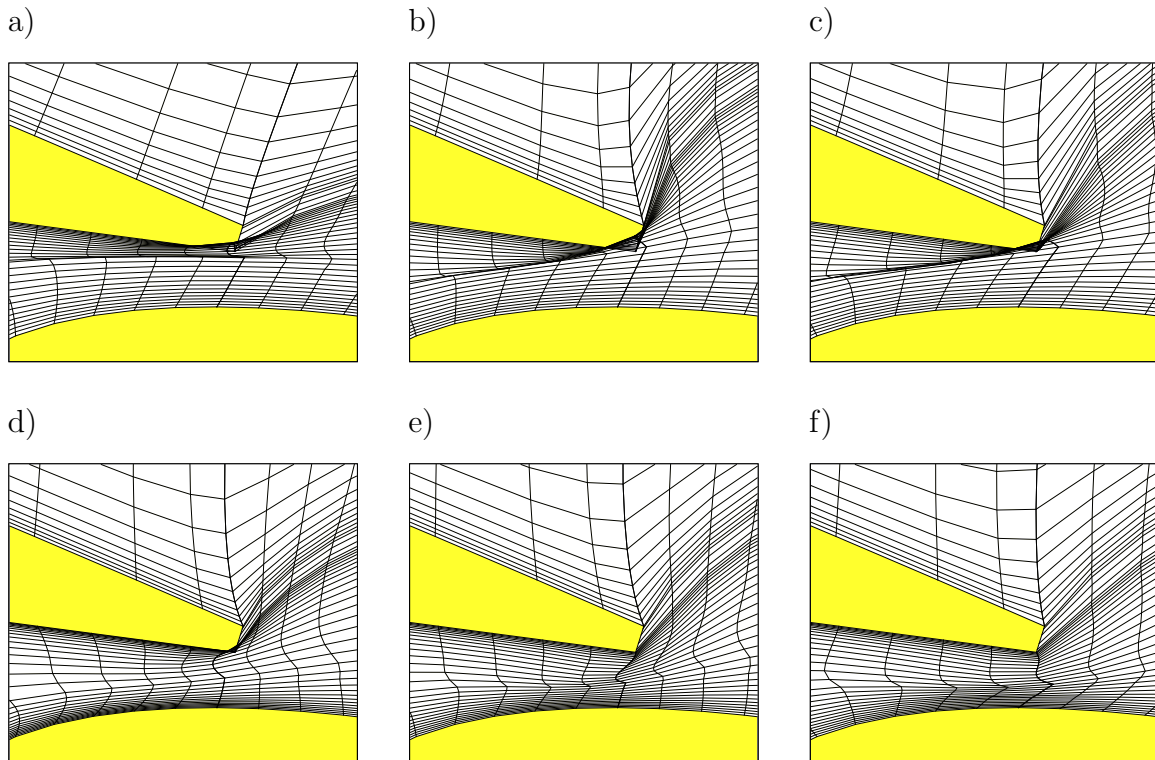


Abbildung 6.14: Gitter nach Verschiebung der Klappe; a) Federanalogie-Modell mit $n = 1, 3$, b) Hyperelastisches Modell mit h und $g = J^{-0.7}$, c) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-0.7}$, d) Hyperelastisches Modell mit $g = J^{-0.9} h_1^{*2/3}$, e) Hyperelastisches Modell mit $g = J^{-0.9} h_1^{2/3}$, f) Linear-elastisches Modell mit $E = J^{-0.9} f_1^{2/3}$

Verzerrungsanteils der Deformation. Als Folge der lokalen Konzentration des Verzerrungsanteils kommt es zu Überschneidungen des Gitters. Ganz ähnlich verhält es sich auch mit dem Hyperelastischen Modell (Abbildung 6.14b) und dem Linear-elastischen Modell (Abbildung 6.14c). Bei letzteren besteht jedoch die Möglichkeit, durch einen etwas allgemeineren Ansatz für den E -Modul bzw. die Gewichtsfunktion eine wesentliche Verbesserung der Gitterqualität zu erzielen und damit den Anwendungsbereich der Methoden noch etwas zu vergrößern. Dazu wird wieder die zweistufige Version dieser Methoden (vgl. Abschnitt 6.2) eingesetzt, in diesem Fall jedoch in Kombination mit der geometrisch basierten Gewichtung. Die entsprechenden Gitter sind in den Abbildungen 6.14e und f dargestellt. Ein Vergleich mit der Abbildung 6.14d zeigt, dass die Sensibilität der Energiedichte gegenüber einer Veränderung der Zellgröße, die im Falle des Tragflügels mit beweglicher Klappe eher schädlich war, sich hier als absolut notwendig erweist, um das Entstehen invertierter Gitterzellen zu verhindern. Auch wenn die modifizierte zweistufige Version zweier Methoden eine Annäherung der beiden Körper auf 15 % des ursprünglichen Abstandes ermöglichte, muss festgehalten werden, dass damit das allen betrachteten Methoden zu Grunde liegende Konzept, wonach die Topologie des Ausgangsgitters erhalten bleibt und lediglich Gitterpunkte verschoben werden, um das Gitter an eine veränderte Berandung anzupassen, ausgereizt ist. Aufgrund des beim modifizierten zweistufigen Verfahren deutlich höheren Aufwandes, verursacht durch die notwendige Abstimmung der beiden Exponenten (optimal waren hier die Werte $-0,9$ für die Jacobi-Determinante und $2/3$ für die Energiedichte) aufeinander, ist die geometrisch basierte Version vorzuziehen wann immer dies möglich ist.

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der Stärken und Schwächen der Methoden

	Verhalten bei Starrkörperbewegung	Verhalten bei allgemeiner Deformation	Rechenzeit- bedarf	‘Black box’
TFI + HEM*	i. A. nicht rotationsinvariant	von Fall zu Fall unterschiedlich	vernachlässigbar bis gering	nein
LAGL	ok	Gitter unbrauchbar	gering	ja
DIGL	nicht rotationsinvariant	Verlust der Wandorthogonalität	gering	ja
FAM	i. A. nicht rotationsinvariant	Verlust der Wandorthogonalität	gering	ja
LEM	bedingt rotationsinvariant	gut	gering	ja
HEM	ok	gut	moderat	ja
HEM*	ok	gut	gering	ja

7 Exemplarische Anwendung

In den vorangehenden Kapiteln wurde eine Verallgemeinerung der in der Strömungsmechanik üblichen Euler’schen Betrachtungsweise diskutiert und die korrekte Implementierung der entsprechend modifizierten Erhaltungsgleichungen in *Elan2* verifiziert. Anschließend wurden verschiedene Methoden zur Gitternachführung analysiert und ihr Potential für die praktische Anwendung ausgelotet. Nachdem diese beiden Teilaspekte der Aufgabenstellung bisher weitestgehend getrennt betrachtet wurden, erfolgt in diesem Kapitel die Integration des Gitternachführungs-Moduls in das Programm zur Strömungssimulation. Im Abschnitt 7.1 werden wichtige Details zur Funktionsweise und dem Programmablauf erläutert, um dann in Abschnitt 7.2 die Leistungsfähigkeit des erweiterten *Elan2*-Programms anhand einer technisch relevanten Strömungskonfiguration — dem oszillierenden Tragflügel — zu demonstrieren.

7.1 Integration der Module

Der Ablauf des gesamten Simulationsprozesses ist in der Abbildung 7.1 skizziert. Der zur Erzeugung des Ausgangsgitters verwendete Gittergenerator besteht aus einer Sammlung von Programmen, welche größtenteils interaktiv arbeiten. Ein Teilschritt beinhaltet dabei die Erzeugung einfacher Gitterblöcke aus den Randpunktedateien. Das Unterprogramm, welches für das Einlesen dieser Dateien und die Zuordnung der Randpunkte in die Datenstruktur des Gitters verantwortlich ist, wurde zum Programmpaket *Elan2* hinzugefügt. Das hat den Vorteil, dass sich die Randbedingungen des Verschiebungsfeldes direkt aus den einfach zu handhabenden Randpunktedateien ermitteln lassen. Soll eine Folge von Gittern vollautomatisch erzeugt werden, wie dies etwa bei einer sich kontinuierlich ändernden Berandung im Allgemeinen notwendig sein wird, so ist es sinnvoll, die bei jedem Zeitschritt auftretenden Verschiebungen, Verdrehungen und Verzerrungen des Randes in einem zusätzlichen Unterprogramm von *Elan2* sukzessive zu berechnen und dabei die entsprechenden Randpunktedateien zu erzeugen.

Im Gegensatz zu den zellzentrierten Feldvariablen des reinen Strömungsproblems ist das Verschiebungsfeld den Zelleckpunkten des Gitters zugeordnet. Da die Datenstruktur von *Elan2* ursprünglich nur für das ‘Cell-Centered’-Schema (vgl. Abbildung 3.2) ausgelegt war, sind Ergänzungen notwendig. Bei einer Lösungsprozedur auf der Grundlage des ‘Cell-Centered’-Schemas läuft eine Schleife über alle Blöcke und dort jeweils

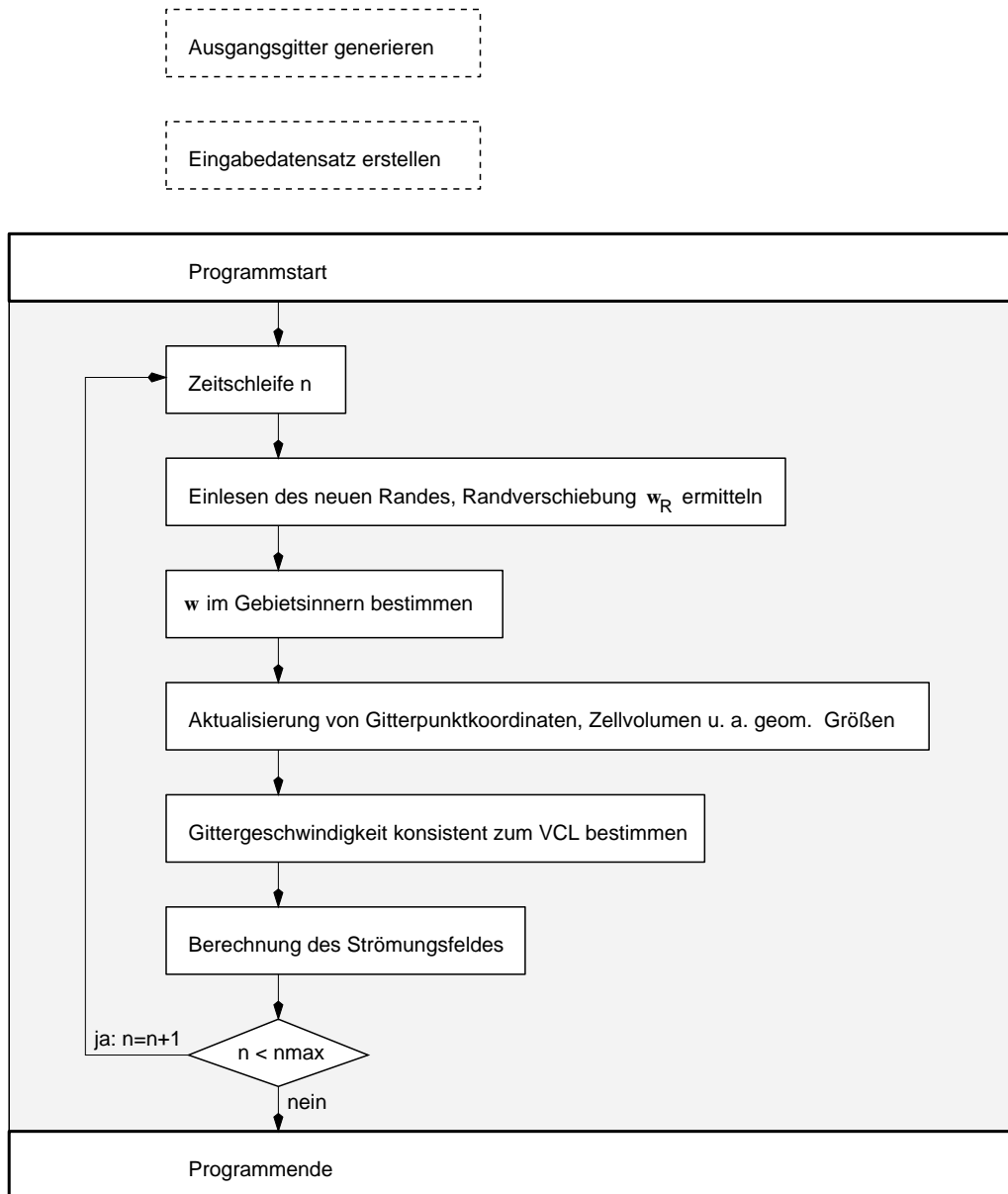


Abbildung 7.1: Ablaufplan des Programms zur Strömungsberechnung mit integriertem Modul zur Gitternachführung

über alle Zellen. Die Koppelung der einzelnen Blöcke wird durch einen Informationsaustausch über zusätzliche Hilfszellschichten realisiert. Einige besondere Punkte, die sogenannten 'Special Points', werden durch eine lineare Interpolation aus den umliegenden Punkten bestimmt. Diese Punkte treten auch beim 'Node-Centered'-Schema auf. Die Werte von w in 'Special Points', welche auf dem Rand liegen, dürfen jedoch nicht verändert werden, da sie als Teil der Randbedingungen vorgegeben sind. Um die besonderen Punkte auf dem Rand von denen im Gebietsinneren unterscheiden zu können, ist die logische Variable *LSPW* eingeführt worden. Bei der Lösungsprozedur, die zur Berechnung der neuen Gitterpunkte zum Einsatz kommt, läuft eine Schleife

über alle Blöcke und dort jeweils über alle inneren Gitterpunkte sowie über die internen Blockgrenzen. Um zu verhindern, dass dabei die Punkte auf den Blockgrenzen zweimal pro Iterationsschritt durchlaufen werden, musste die logische Variable `LBDONE` eingeführt werden. Für jede Seite eines Blockes werden zur Auswertung der diversen Differentialausdrücke auf den internen Blockgrenzen außerdem Funktionswerte in Zellecken des Nachbarblocks benötigt. Der Zugriff auf die entsprechenden Speicherplätze wird durch das neue Indexfeld `IJVBD` ermöglicht. Die drei Variablen `LSPW`, `LBDONE` und `IJVBD` werden aus den vom Gittergenerator gelieferten topologischen Informationen gewonnen. Dies geschieht gleich nach dem Start des Hauptprogramms durch Aufruf des Unterprogramms `topoadd`.

7.2 Oszillierender Tragflügel

Ein Tragflügel, der eine oszillierende Nickbewegung vollführt (siehe Abbildung 7.2), stellt eine einfache, im Hinblick auf die Turbulenzmodellierung jedoch bereits recht anspruchsvolle Strömungskonfiguration dar. Sie ist für eine Reihe von technischen An-

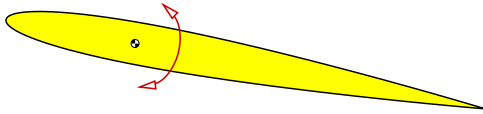


Abbildung 7.2: Skizze des oszillierenden Tragflügels

wendungen von großer Bedeutung. Als Beispiel sei hier ein Hubschrauber im Vorwärtsflug genannt. Um einen Auftriebsausgleich zwischen vor- und rücklaufendem Blatt zu gewährleisten, muss hierbei der Anstellwinkel des Rotorblattes abhängig von seiner Umlaufposition verändert werden.

Die Umströmung eines oszillierenden Tragflügels wird von zwei Zeitskalen dominiert. Die erste ist mit der Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung U_∞ und der Profillänge c verbunden. Man verwendet $\frac{c}{2U_\infty}$. Die zweite hingegen ergibt sich aus der Frequenz f der periodischen Oszillation zu $\frac{1}{2\pi f}$. Man führt einen dimensionslosen Parameter, die ‘reduced frequency’ k_{red} , ein [PZ92]. Sie ergibt sich aus dem Quotienten der beiden Zeitskalen zu $k_{red} = \frac{\pi f c}{U_\infty}$. Auftrieb und Widerstand beim oszillierenden Tragflügel unterscheiden sich ganz wesentlich vom stationären Fall, bei dem eine Strömungsablösung zumeist an der Hinterkante des Profils erfolgt, falls der Anstellwinkel hinreichend groß ist. Die Entstehung und der Verlauf der instationären Ablösung beim bewegten Tragflügel sind wesentlich komplexer und werden als ‘Dynamic Stall’ bezeichnet. Bevor die Ergebnisse der numerischen Simulation diskutiert werden können, muss dieser Begriff zunächst näher erläutert werden.

7.2.1 Phänomenologie des Dynamic Stall

Unter dem Begriff ‘Dynamic Stall’ versteht man den instationären Strömungsabriss an aerodynamischen Körpern, die Kippbewegungen mit großer Amplitude vollführen. Charakteristisch für diesen Vorgang ist die Bildung großräumiger Wirbelstrukturen,

welche eine ausgeprägte Hysterese bewirken. Die auffälligste Struktur hierbei ist ein Wirbel, der sich vorn am Flügel bildet und der, während er über die Oberseite wandert, den Druckverlauf und die Wirbelstärke an der Körperoberfläche sowie die daraus resultierenden aerodynamischen Kräfte ganz wesentlich beeinflusst. Er wird in der Literatur einheitlich als ‘Dynamic Stall Vortex’ (DSV) bezeichnet. Aufgrund der zentralen Rolle, welche der DSV für das Phänomen des ‘Dynamic Stall’ spielt, sind zahlreiche experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden, um den Mechanismus seiner Entstehung besser zu verstehen. McCroskey u. a. [MCM76] untersuchten experimentell die inkompressible Umströmung oszillierender NACA0012-Profilen mit unterschiedlichen Nasengeometrien. Sie identifizierten dabei drei mögliche Arten der Wirbelentstehung. Diese werden zusammen mit dem kompressiblen Fall nachfolgend kurz erläutert.

Typ 1: Bei laminarer Strömung ($Re < 10^4$) wird der ‘Dynamic Stall’ an der Hinterkante des Tragflügels eingeleitet. Eine dünne Schicht bildet sich aus, in der das Fluid beginnt, an der Oberseite des Profils nach vorne zu strömen (vgl. hierzu Abschnitt 4.2), ohne dabei jedoch eine Ablösung der Grenzschicht hervorzurufen. In dem Moment, in dem das zurückströmende Fluid den Bereich der Vorderkante erreicht, erfolgt ein Ausbruch der wirbelbehafteten Schicht und nachfolgend die Formation des DSV.

Typ 2: Die Strömung bei höheren Reynoldszahlen ist gekennzeichnet durch einen laminar-turbulenten Umschlag der Grenzschicht. In dem Bereich bis etwa $Re = 10^6$ ist die Grenzschicht anfangs noch laminar. Infolge des starken Druckgradienten hinter der Sogspitze bildet sich auf der Oberseite eine laminare Ablöseblase womit auch der laminar-turbulente Umschlag der Grenzschicht einhergeht. Ein stetig steigender Anstellwinkel führt schließlich zum Platzen der laminaren Ablöseblase und damit zur Entstehung des DSV.

Typ 3: Der DSV kann seinen Ursprung auch in einer Ablösung der turbulenten Grenzschicht, welche typischerweise kurz nach der laminaren Ablöseblase erfolgt, haben.

Typ 4: Bei Machzahlen größer 0,2 muss mit kompressiblen Effekten gerechnet werden [CCW94]. Im Falle $Ma > 0,3$ geht der Bildung des DSV eine stossinduzierte Ablösung voraus.

Die Abbildung 7.3, entnommen aus der Arbeit von Carr u. a. [CCM77], veranschaulicht den gesamten Vorgang des ‘Dynamic Stall’. Gezeigt werden die Auftriebs- und Momentenbeiwerte als Funktion des zeitabhängigen Anstellwinkels eines oszillierenden NACA0012-Profiles. Im Punkt a) beginnt der Auftriebsbeiwert vom stationären Fall stark abzuweichen. Offenbar ist die Grenzschicht aufgrund der Kippbewegung des Profils wesentlich widerstandsfähiger gegen eine Strömungsablösung an der Hinterkante. Dies hat verschiedene Ursachen. Ein quasi-stationärer Effekt resultiert daraus, dass die Grenzschicht des bewegten Flügels im Punkt der stationären Ablösung eine günstigere Vorgeschichte hat [GB91]. Während das Fluid den Weg von der Vorderkante zum Punkt der stationären Ablösung zurücklegt, wird der Anstellwinkel größer. Der Grenz-

a) Stationäre Ablösung
b) Erstes Auftreten von Rückströmung der Oberseite
c) Turbulenzballen tauchen in der Grenzschicht auf
d) Rückströmung breitet sich über der Saugseite schnell aus
e) Wirbel bilden sich an der Vorderkante
f) Beginn von Momenten-‘Stall’
g) Auftriebsanstieg nimmt zu
h) Auftriebs-‘Stall’
i) Maximales negatives Moment
j) Vollständig abgelöst, ‘Full Stall’
k) Grenzschicht legt sich wieder von vorn nach hinten an
l) Rückkehr zur anliegenden Strömung

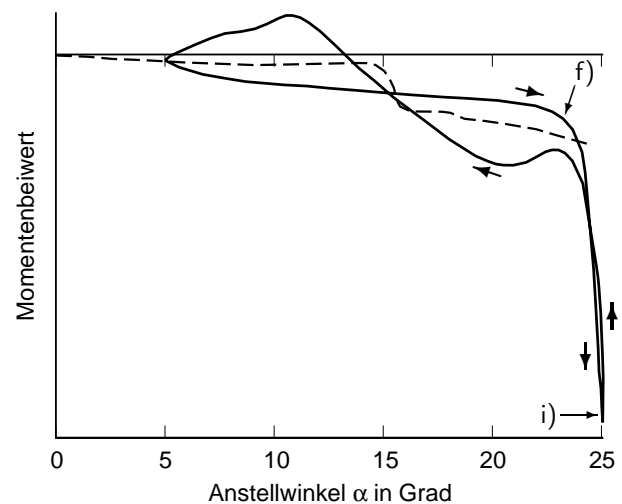
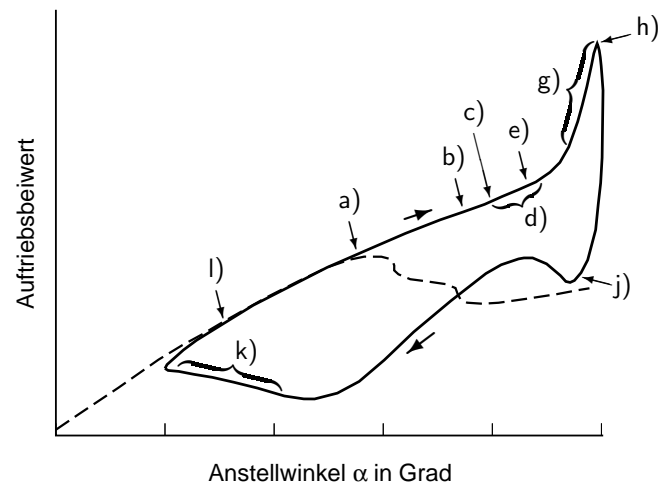


Abbildung 7.3: Chronologie des ‘Dynamic Stall’ an einem NACA0012-Profil [CCM77]

schicht wird somit weniger Energie entzogen, da sie anfangs einen geringeren Druckgradienten zu überwinden hat. Die zweite Ursache ist tatsächlich instationärer Natur und wird durch die Aufwärtsbewegung der Flügelvorderkante hervorgerufen. Ganz ähnlich wie bei dem bei einem rotierenden Zylinder zu beobachtenden Magnus-Effekt, bewirkt die Bewegung der Oberfläche vollere Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht und eine Verzögerung der Transition [Eri94]. Eine erste Störung der Grenzschicht stellt die an der Hinterkante beginnende Rückströmung dar. Sie ist in der Abbildung 7.3 durch den Punkt b) markiert. Die Rückströmung breitet sich über die Saugseite schnell aus. Die Grenzschicht im hinteren Bereich, nun ohne Wandhaftung, ist nicht mehr länger stabil und weist unter dem Einfluss der entstehenden Turbulenzballen einen wellenförmigen Verlauf auf. Abhängig von Reynoldszahl, Machzahl, Tragflügelgeometrie und reduzierter Frequenz führt einer der vier weiter oben diskutierten Mechanismen zur Bildung des ‘Dynamic Stall Vortex’ (Punkt e)). Der DSV wird zunehmend stärker und beginnt sich in Strömungsrichtung über die Oberseite zu bewegen, wodurch der Momenten-‘Stall’ eingeleitet wird. Wenn die reduzierte Frequenz groß genug ist, verweilt der DSV lange genug über dem Flügel, um kurzzeitig einen starken Auftriebsanstieg zu verursachen, bevor er weggeschwemmt wird und zusammen mit einem an der Hinterkante gebildeten Wirbel in den Nachlauf übergeht. Diesen Vorgang sowie den hieraus resultierenden Auftriebs-‘Stall’ bezeichnen die Punkte g) und h). In der Folge ist die Strömung vollständig abgelöst, bis sie sich schließlich bei kleineren Anstellwinkeln wieder von vorn nach hinten anlegt (Punkte j) und k)).

7.2.2 Numerische Simulation

Da bei der Strömung um angestellte Tragflügel Geschwindigkeiten auftreten können, die ein Vielfaches der ungestörten Anströmungsgeschwindigkeit betragen, kommt nur ein Testfall mit sehr geringer Machzahl in Frage, da andernfalls die Gefahr bestünde, dass die Inkompressibilitätsannahme nicht erfüllt wäre. Außerdem sollte die Amplitude der Bewegung groß sein, so dass eine fundierte Aussage über die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden zur Gitternachführung getroffen werden kann. Das Windkanalexperiment mit einem oszillierenden NACA0012-Profil von McCroskey u. a. [MMCP82] erfüllt beide Forderungen. Die Nickbewegung des Profils ist dabei gegeben durch:

$$\alpha = 15^\circ + 10^\circ \sin(2k_{red}t^*), \quad (7.1)$$

mit der dimensionslosen Zeit $t^* = t \frac{U_\infty}{c}$. Der Drehmittelpunkt befindet sich bei $x = 0,25c$. Zur Validierung der numerischen Ergebnisse stehen die am Windkanal ermittelten Hysteresekurven der Auftriebs- und Momentenbeiwerte c_l und c_m zur Verfügung. Um den Einfluss zufälliger Störungen zu verringern, sind die bei den Windkanalmessungen erfassten Daten über mindestens 50 Zyklen gemittelt worden. Besonders für die Phase des ‘Dynamic Stall’ schwankten die Messdaten von Zyklus zu Zyklus erheblich. Das Windkanalmodell war mit 26 Druckaufnehmern versehen, wovon sich 15 auf der Flügeloberseite befanden. Durch die begrenzte Anzahl von Druckaufnehmern konnten

kleinskalige Strömungsphänomene nur unzureichend erfasst werden. Die Abtastrate der Meßsonden von 200 pro Zyklus hatte auch eine Beschränkung der zeitlichen Auflösung zur Folge. Die Autoren der Studie vermuten, dass der Auftriebsbeiwert aufgrund der genannten Fehlerquellen mit einem maximalen Fehler von $\pm 0,2$ behaftet war.

Da die Experimente nur Druckverläufe lieferten, wird bei der Berechnung der Auftriebs- und Momentenbeiwerte der Beitrag der Wandschubspannung vernachlässigt. Bei den meisten Berechnungen wird $k_{red} = 0,1$ verwendet. Weitere Strömungsparameter lauten:

$$Ma = 0,072; \quad Re = 10^6; \quad c = 1,22 \text{ m}; \quad U_\infty = 12,2 \text{ m/s}; \quad Tu = 1 \text{ \%}.$$

Zur Gitternachführung kommt, sofern nicht anders angegeben, das Linear-elastische Modell mit $E = J^{-1}$ zum Einsatz. Die Approximation des konvektiven Terms der Erhaltungsgleichungen erfolgt mit Hilfe des UMIST-Ansatzes. Der in Kapitel 4 ausgesprochenen Empfehlung folgend wird ausschließlich die zweite Ordnung genaue Diskretisierung des instationären Terms verwendet.

Einer Untersuchung von Jameson und Martinelli [JM98] zufolge sollte ein Rechengitter sowohl die turbulente Grenzschicht als auch das restliche Gebiet bis zum Fernfeldrand mit jeweils mindestens 32 Intervallen auflösen, um eine gitterunabhängige Lösung zu erhalten. Außerdem ist zu beachten, dass die Gitterzellen kein übertrieben großes Seitenverhältnis aufweisen (< 1000), da sich dies nachteilig auf Konvergenzverhalten und Genauigkeit des numerischen Verfahrens auswirkt. Entsprechend diesen Vorgaben wurde hier ein Rechengitter mit C-Topologie, bestehend aus 514×65 Punkten, verwendet. Die wandnächste Zellschicht hat dabei eine Dicke von $10^{-5}c$, wodurch sichergestellt ist, dass der dimensionslose Wandabstand y^+ kleiner Eins ist. Der Fernfeld- und der Ausströmrand sind $12c$ entfernt. Um die Gitterunabhängigkeit der Lösung zu demonstrieren, wurde noch ein gröberes Gitter mit 257×65 Punkten und ein feineres Gitter mit 514×130 Punkten generiert.

Die Abbildung 7.4 zeigt die mit Hilfe der drei Gitter berechneten c_l - und c_m -Verläufe und vergleicht sie mit den Ergebnissen des Windkanalversuches. Bei der numerischen Simulation kam das Wilcox $k - \omega$ Modell zum Einsatz. Ein Zyklus wurde dabei in 200 Zeitschritte aufgeteilt. Die mit dem Start der numerischen Lösungsprozedur verbundenen Anfangsstörungen waren in der Regel nach drei, in Ausnahmefällen auch erst nach sechs Zyklen abgeklungen. Das grobe Gitter liefert Hysteresekurven, welche sich von denen der feineren Gitter deutlich unterscheiden. Während sich z. B. bei den beiden feineren Gittern hinsichtlich Lage und Größe des Auftriebsmaximums weitestgehende Übereinstimmung ergibt, erfolgt der Auftriebs-‘Stall’ beim groben Gitter wesentlich früher. Eine signifikante Abweichung der Lösung für das Basisgitter von der des ganz feinen Gitters ist nur im Anschluss an den Momenten-‘Stall’, im Bereich von 25° bis 18° , zu verzeichnen. Gerade für diese Phase der vollständigen Strömungsablösung muss jedoch auch damit gerechnet werden, dass sich Defizite bei der Turbulenzmodellierung bemerkbar machen. Es ist folglich nicht davon auszugehen, dass die bei Verwendung des feinsten Gitters vermeintlich mögliche Steigerung der Genauigkeit den damit ver-

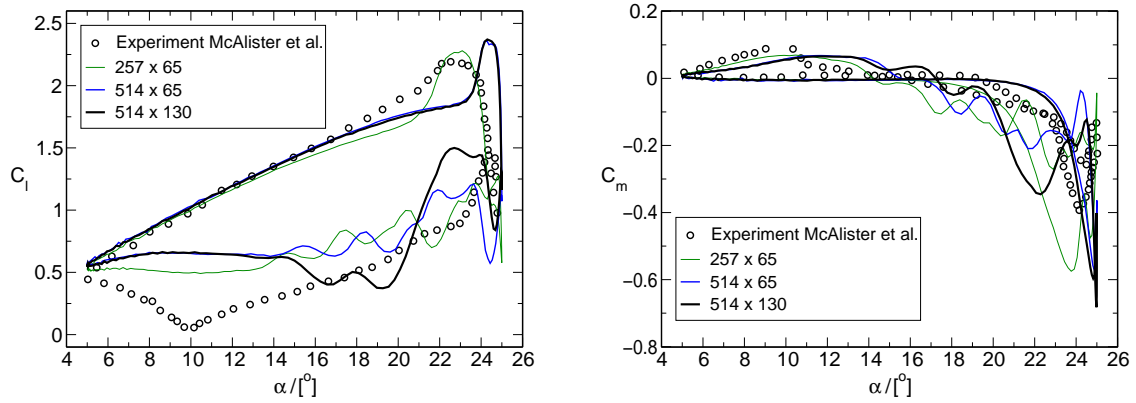


Abbildung 7.4: *Hystereseschleifen der Auftriebs- und Momentenbeiwerte für verschieden feine Rechengitter*

bundenen, beachtlich höheren Rechenaufwand aufwiegt. In diesem Sinn können die mit dem Basisgitter erzielten Ergebnisse als annähernd gitterunabhängig angesehen werden.

Numerische Berechnungen mit sukzessive verkleinerten Zeitschrittweiten Δt ermöglichen eine quantitative Aussage bezüglich des zeitlichen Diskretisierungsfehlers. Entsprechende Ergebnisse sind in der Abbildung 7.5 dargestellt. Während sich der zeitliche Diskretisierungsfehler schon bei einer Aufteilung der Periodendauer T in 200 Zeitschritte kaum noch bemerkbar macht, ist spätestens beim Übergang von 800 zu 1600 Zeitschritten keine signifikante Veränderung mehr zu erkennen. Das LLR $k - \omega$ Modell entwickelt im Gegensatz dazu sehr viel mehr Dynamik. Auch eine noch feinere Aufteilung in 3200 Zeitschritte pro Zyklus führt nicht dazu, dass sich die Hysteresekurven vollständig aneinander angleichen, wie man in der Abbildung 7.6 erkennen kann. Eine weitere Verkleinerung der Zeitschrittweite erscheint vor dem Hintergrund des Separationsproblems (vgl. Abschnitt 2.3.1) indes wenig sinnvoll. Die Frequenz, mit der

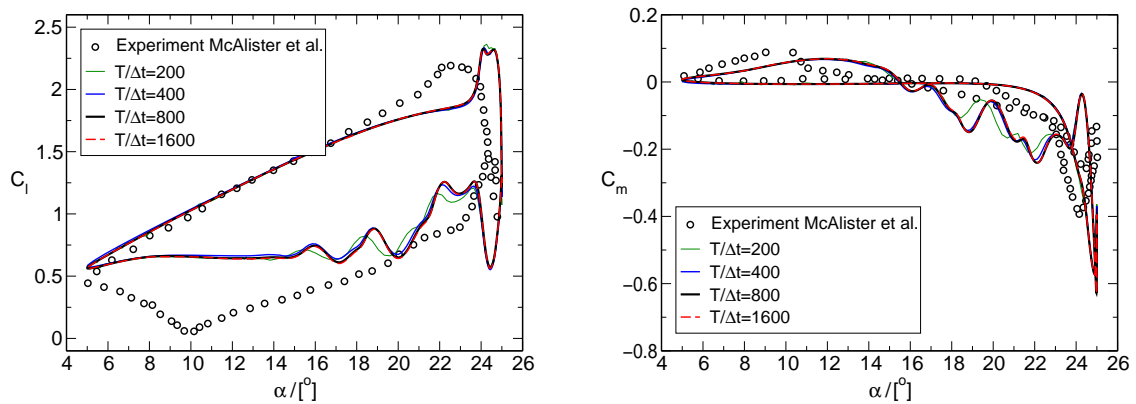


Abbildung 7.5: *Hystereseschleifen der Auftriebs- und Momentenbeiwerte für unterschiedliche Zeitschritte bei Verwendung des Wilcox $k - \omega$ Modells*

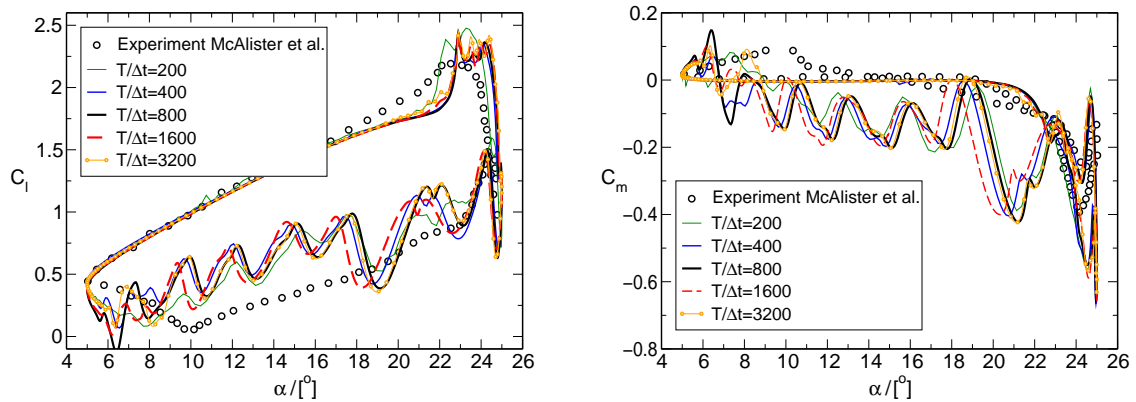


Abbildung 7.6: *Hystereseschleifen der Auftriebs- und Momentenbeiwerte für unterschiedliche Zeitschritte bei Verwendung des LLR $k - \omega$ Modells*

sich der Tragflügel periodisch auf und ab bewegt, ist zwar gemäß der Abschätzung 2.15 wie gefordert um wenigstens ein bis zwei Größenordnungen kleiner als die charakteristischen Frequenzen der turbulenten Schwankungsbewegung. Die Phase des ‘Dynamic Stall’ und der nachfolgenden vollständigen Strömungsablösung ist jedoch durch das Auftreten mehrerer Sekundärwirbel gekennzeichnet, deren Einfluss auf den Tragflügel auf einen Bruchteil der gesamten Periodendauer T beschränkt bleibt. Als Folge dessen kommt es zu einer Überlagerung der Hystereseurve mit höherfrequenten Schwankungen, welche umso ausgeprägter ausfallen, je kleiner die Zeitschrittweite ist. Bei zu kleinen Zeitschrittweiten würden damit Zeitskalen aufgelöst, die außerhalb des Gültigkeitsbereichs der statistischen Turbulenzmodellierung liegen. Im Hinblick darauf kann die Aufteilung eines Zyklus in 800 Zeitschritte, welche sich bei Verwendung des Wilcox $k - \omega$ Modells als optimal erwies, auch beim LLR $k - \omega$ Modell als guter Kompromiss angesehen werden. Sie liegt allen nun folgenden numerischen Berechnungen zu Grunde.

Der in der Abbildung 7.7 dargestellte Verlauf des Drucks an der Flügeloberseite erlaubt eine weitergehende Interpretation der Auftriebs- und Momentenbeiwerte. Beginnend mit dem minimalen Anstellwinkel von 5° zeigt die Abbildung Druckverläufe zu verschiedenen Zeitpunkten eines Zyklus der Bewegung. Der Auftrieb nimmt zunächst linear zu. Dieser Anstieg ist in erster Linie eine Folge des Überdrucks, welcher sich im vorderen Bereich der Flügeloberseite aufbaut. In der Abbildung 7.7 ist gut zu erkennen, dass die Entstehung der Sogspitze von der numerischen Simulation — unabhängig von der Wahl des Turbulenzmodells — sehr präzise wiedergegeben wird. Zwischen $20,8^\circ$ und $23,2^\circ$ kollabiert die Sogspitze. Die Abbildung 7.8 zeigt die unter Verwendung des LLR $k - \omega$ Modells numerisch berechnete zeitliche Entwicklung der Wirbelstärke während dieser kritischen Phase. Sie erlaubt einen tieferen Einblick in das Strömungsgeschehen. Bei etwa $22,7^\circ$ erreicht eine Schicht zurückströmenden Fluids den Nasenbereich des Flügels und initiiert die Bildung des ‘Dynamic Stall Vortex’ (siehe Abbildung 7.9a). Da die Rechnung vollturbulente Strömung voraussetzt, tritt dabei keine laminare Ablöseblase auf. Der DSV beginnt nun über die Flügeloberseite zu wan-

dern. Er hinterlässt eine deutliche Signatur in den c_d -Profilen für $23,2^\circ$ und $24,4^\circ$. Der bei einem Anstellwinkel von $24,9^\circ$ auftretende extreme Anstieg des Unterdrucks zum Profilende hin ist auf den ‘Trailing Edge Vortex’ (TEV) zurückzuführen, welcher in der Abbildung 7.8 ebenfalls gut zu erkennen ist. In den experimentellen Daten spiegelt sich der Einfluss dieser Wirbel weniger stark wider. Angesichts der zu Beginn des Abschnitts diskutierten Meßunsicherheiten und -fehler (Mittelung über viele Zyklen, etc.) erscheint es durchaus plausibel, dass Druckschwankungen über die Profillänge tendenziell etwas verschmiert werden und damit der Einfluss von DSV und TEV im Windkanalversuch unterschätzt wird. Die beiden Wirbel prägen auch den Verlauf des Momentenbeiwertes. Der DSV löst sich kurz nach seiner Entstehung vom Nasenbereich des Flügels und bewegt sich auf der Flügeloberseite stromabwärts. Bei einem

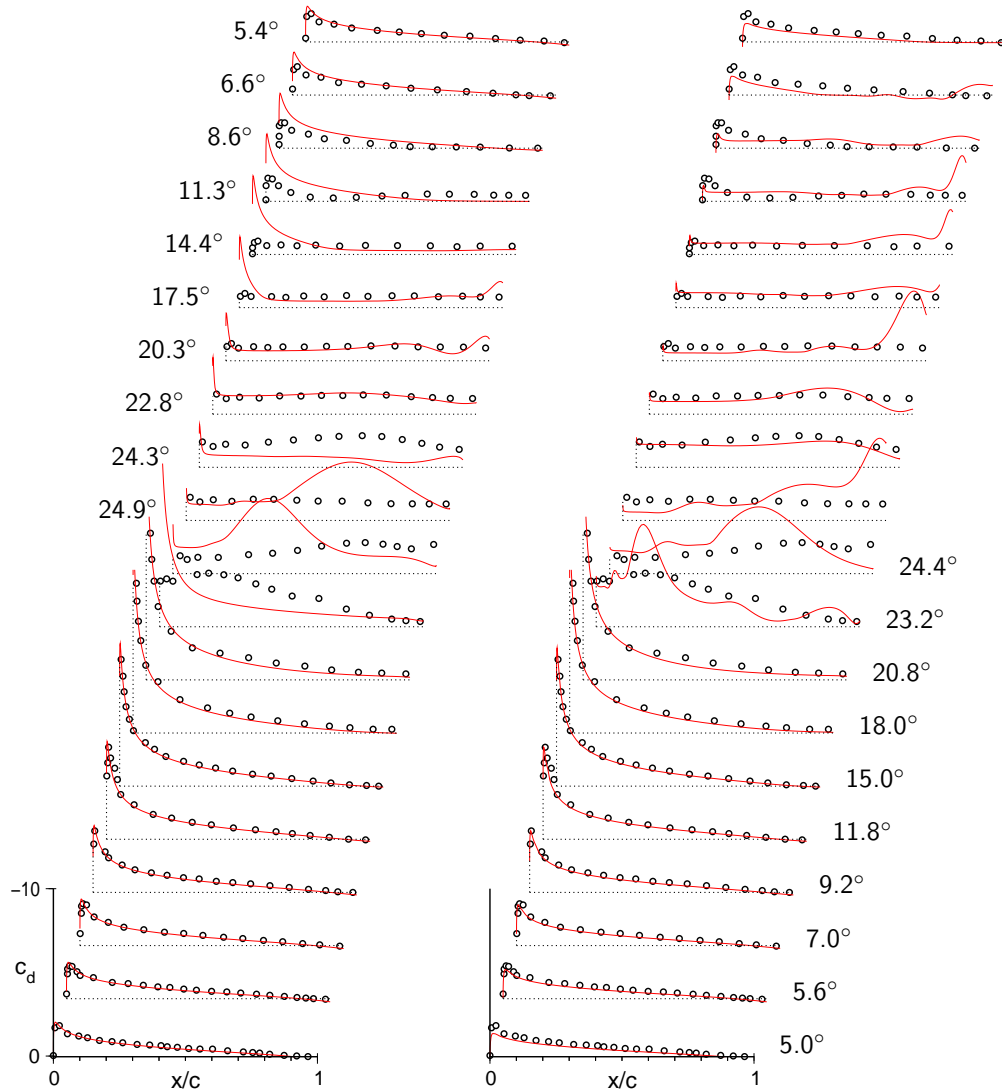


Abbildung 7.7: Druckbeiwert c_d auf Flügeloberseite in Abhängigkeit des Anstellwinkels bei Verwendung des Wilcox $k-\omega$ Modells (links) und des LLR $k-\omega$ Modells (rechts)

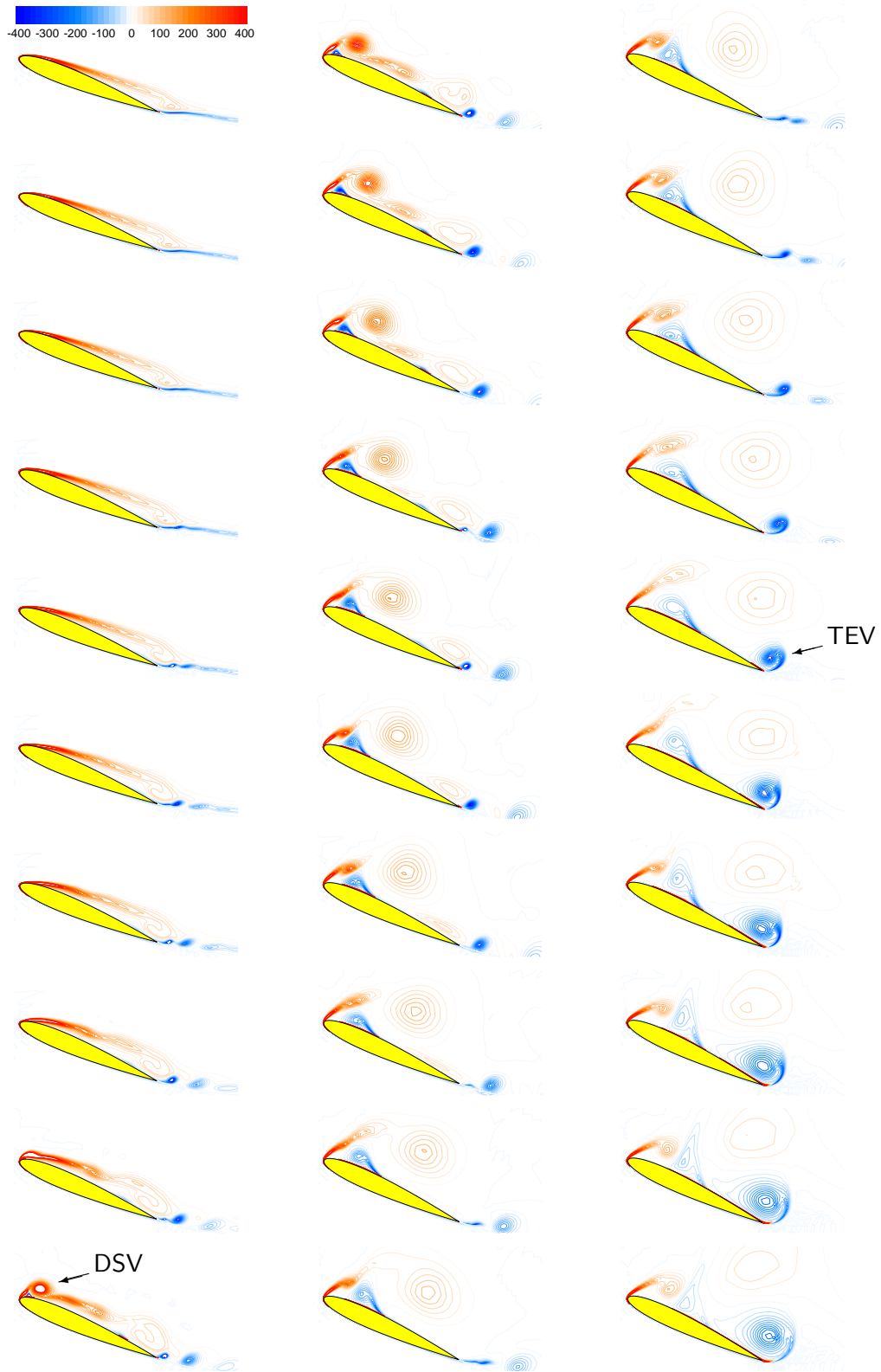


Abbildung 7.8: Isolinien der Wirbelstärke für $k_{red} = 0,1$ im Bereich $\alpha = 21,1^\circ$ bis $\alpha = 25^\circ$ (LLR $k - \omega$ Modell, $T/\Delta t = 800$)

Anstellwinkel von etwa $23,4^\circ$ passiert er den Drehmittelpunkt. In diesem Augenblick bricht der Momentenbeiwert deutlich ein. Der Wiederanstieg des Momentenbeiwerts erfolgt wenig später und zwar genau zu dem Zeitpunkt, in dem der DSV den Kontakt zum Flügel vollständig verliert und in den Nachlauf übergeht (vgl. Abbildung 7.8). Während im Experiment das mit dem DSV assoziierte Minimum im c_m -Verlauf in der Folge nicht mehr unterschritten wird, bewirkt der TEV bei der numerischen Simulation einen nochmaligen kurzzeitigen, starken Einbruch. Die c_d -Profile in der Abbildung 7.7 dokumentieren die hervorragende Übereinstimmung von Numerik und Experiment im Bereich von 5° bis $20,8^\circ$. Bei weiter steigendem Anstellwinkel und der sich daran anschließenden gesamten Phase des ‘Post-Stall’ treten jedoch Abweichungen zutage. Sie sind zum einen auf Meßunsicherheiten zurückzuführen, die im Experiment während der vollständigen Strömungsablösung verstärkt in Erscheinung traten. Zum anderen sind dafür aber auch Defizite bei der Turbulenzmodellierung verantwortlich. Beim Wilcox $k - \omega$ Modell verschiebt sich das Auftriebsmaximum zu größeren Anstellwinkeln hin. Das schnelle Anwachsen des Rückstromgebiets und der hieraus resultierende Zusammenbruch der Sogspitze wird vom Wilcox $k - \omega$ Modell unterschätzt. Nach dem Kollaps baut sich der Unterdruck auch viel zu früh wieder auf. Das hat zur Folge, dass der Auftriebsbeiwert, welcher im Experiment zeitweise fast Null wird, den Wert 0,5 nicht unterschreitet. Im Gegensatz dazu gibt das LLR $k - \omega$ Modell den plötzlichen Druckanstieg und den langsamen Wiederaufbau der Unterdruckzone an der Flügel-nase relativ gut wieder. Unterschiede ergeben sich eher an der Hinterkante aufgrund der starken Sekundärwirbelbildung, welche sich in den Hysteresekurven durch heftige Schwankungen äußert. Insgesamt betrachtet scheint das LLR $k - \omega$ Modell dem Wilcox $k - \omega$ Modell überlegen zu sein, da vor allem die genaue Vorhersage der Strömung im Nasenbereich des Flügels von entscheidender Bedeutung für den gesamten Vorgang des ‘Dynamic Stall’ ist.

Die Abbildungen 7.10 bis 7.12 dokumentieren den Einfluss der reduzierten Frequenz auf die Strömung. Zum Vergleich sind die Ergebnisse einer numerischen Simulation

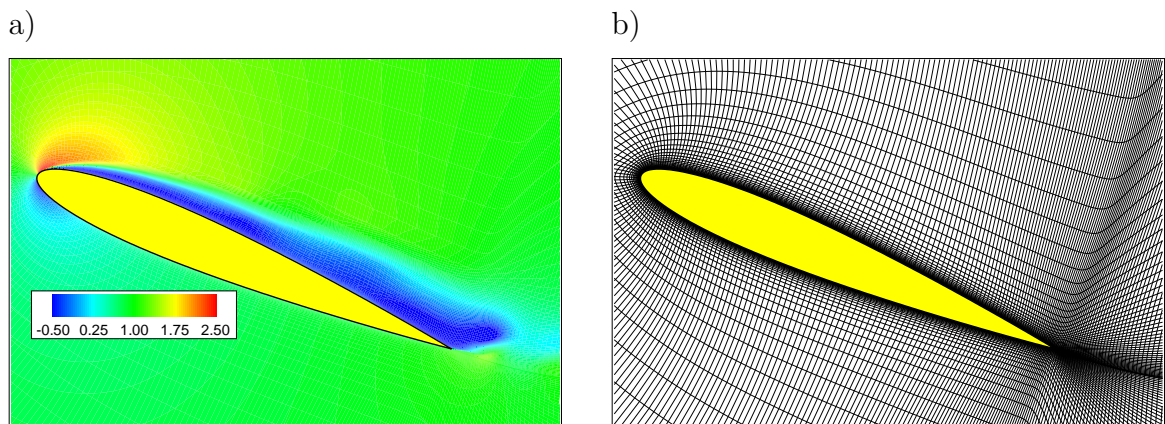


Abbildung 7.9: Momentaufnahme bei $\alpha = 22,7^\circ$, kurz vor Bildung des DSV; a) Normierte Strömungsgeschwindigkeit, b) Rechengitter

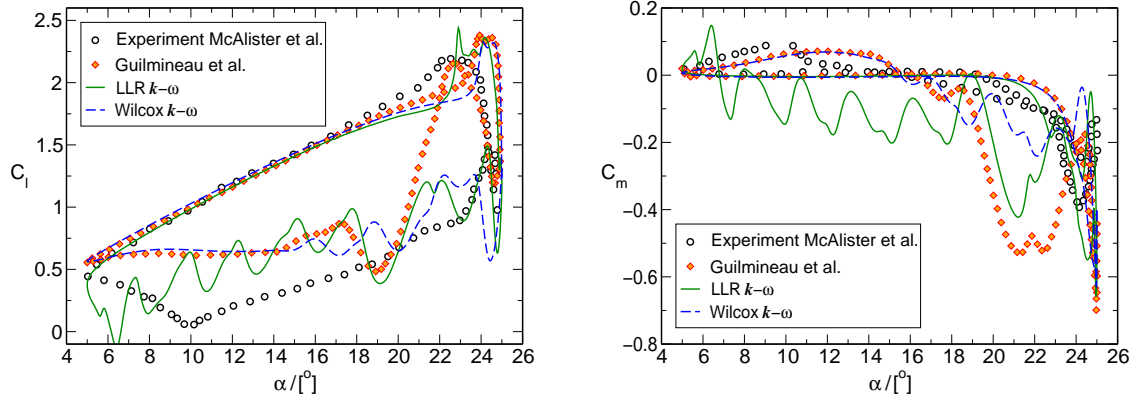


Abbildung 7.10: Auftriebs- und Momentenbeiwerte für $k_{red} = 0,10$

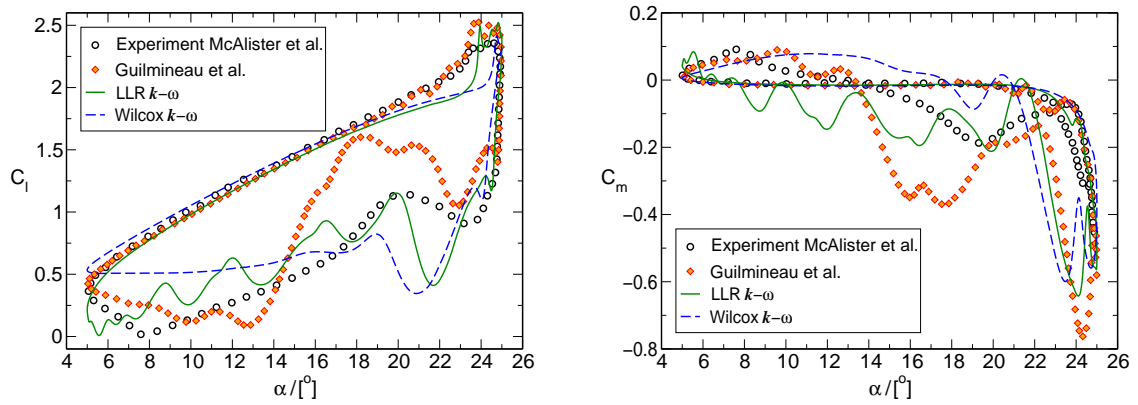


Abbildung 7.11: Auftriebs- und Momentenbeiwerte für $k_{red} = 0,15$

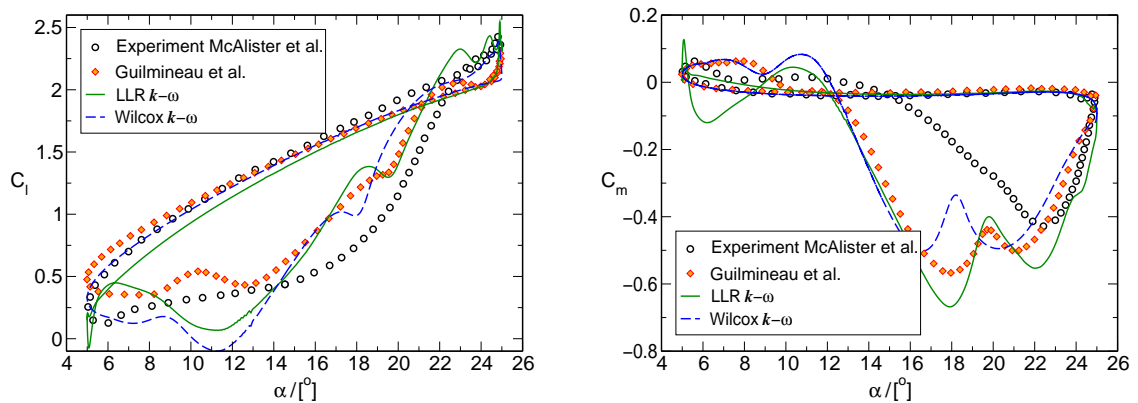


Abbildung 7.12: Auftriebs- und Momentenbeiwerte für $k_{red} = 0,25$

von Guilmineau u. a. [GPQ97] ebenfalls mit aufgeführt. Bei dieser Studie wurde das SST $k - \omega$ Modell von Menter [Men94] eingesetzt. Es stellt ebenso wie das LLR-Modell eine Weiterentwicklung des Wilcox $k - \omega$ Modells dar. Zur räumlichen Diskretisierung diente ein starr rotierendes Gitter mit O-Topologie, bestehend aus 202×90 Punkten. Die zeitliche Auflösung war mit 3200 bis 4200 Zeitschritten pro Zyklus relativ fein. Die Übereinstimmung zwischen den numerischen Lösungen und den Meßergebnissen ist im Bereich von $\alpha = 5^\circ$ bis $\alpha = 20^\circ$ im Fall $k_{red} = 0,1$ sehr gut. Bei größeren Anstellwinkeln treten jedoch Abweichungen auf. Im Experiment beobachtet man den Auftriebs-‘Stall’ schon bei etwa 22° , wohingegen er bei der Strömungssimulationen ungeachtet der Wahl des Turbulenzmodells zeitlich verzögert erfolgt. Guilmineau u. a. schreiben dies dem Einfluss einer im Verlauf der Oszillationsbewegung mehr oder weniger stark ausge dehnten Transitionszone zu, welche von den Turbulenzmodellen unzureichend erfasst wird. Besonders auffällig beim SST $k - \omega$ Modell ist der extreme Anstieg des Auftriebsbeiwertes kurz nach Erreichen des maximalen Anstellwinkels. Guilmineau u. a. führen diese auf den ‘Leading Edge Vortex’ zurück. Er bildet sich ebenfalls wie der DSV an der Vorderkante des Profils, wird aber bei der numerischen Simulation hinsichtlich seiner Stärke und seines Einflusses deutlich überschätzt. Dieses Problem tritt bei den im Rahmen dieser Arbeit mit dem LLR $k - \omega$ Modell und dem Wilcox $k - \omega$ Modell durchgeführten Simulationen nicht auf. Infolge der Erhöhung der reduzierten Frequenz bildet sich der DSV erst nach einer zeitlichen Verzögerung (siehe Abbildungen 7.13 und 7.14). Dies hat zur Folge, dass auch Auftriebs- und Momenten-‘Stall’ erst später einsetzen. Mit zunehmender Frequenz der periodischen Oszillation erhöht sich darüberhinaus die Verweildauer des DSV über dem Tragflügel. Bei $k_{red} = 0,25$ gehen DSV und TEV praktisch zeitgleich in den Nachlauf über. Dies äußert sich im Verlauf des Momentenbeiwertes dadurch, dass es nur ein ausgeprägtes Minimum gibt. Dieser Sachverhalt wird von den numerischen Verfahren nicht korrekt wiedergegeben. Beim Vergleich der numerischen Lösungen untereinander fallen besonders die starken Schwankungen auf, mit denen die Hysteresekurven des LLR $k - \omega$ Modells überlagert sind. Angesichts der Mittelung der Windkanaldaten fällt es schwer zu beurteilen, inwiefern diese Schwankungen der Realität entsprechen. Es gibt jedoch experimentelle Befunde (z. B. [PZ92]), welche die Existenz der für die Schwankungen verantwortlichen Sekundärwirbel belegen. Insgesamt betrachtet zeigen die numerischen Lösungen für die Aufwärtsbewegung des Tragflügelprofils eine recht gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Für die Abwärtsbewegung muss hingegen ein starker Einfluss der Turbulenzmodellierung auf die Qualität der Ergebnisse konstatiert werden. Vor allem die Berücksichtigung der Transition durch ein geeignetes Modell erscheint hier als wichtiger Ansatzpunkt für Verbesserungen.

Im Hinblick auf die Fragestellung dieser Arbeit ist natürlich von besonderem Interesse, welchen Einfluss die Gitterverformung auf die Lösung hat. Die beiden Hyperelastischen Modelle verwenden ebenfalls wie das Linear-elastische Modell die Gewichtsfunktion $g = J^{-1}$, um eine adäquate Gleichverteilung der Verzerrung zu gewährleisten. Der entsprechende Parameter beim Federanalogie-Modell ist $n = 1,8$. Die maximalen Win-

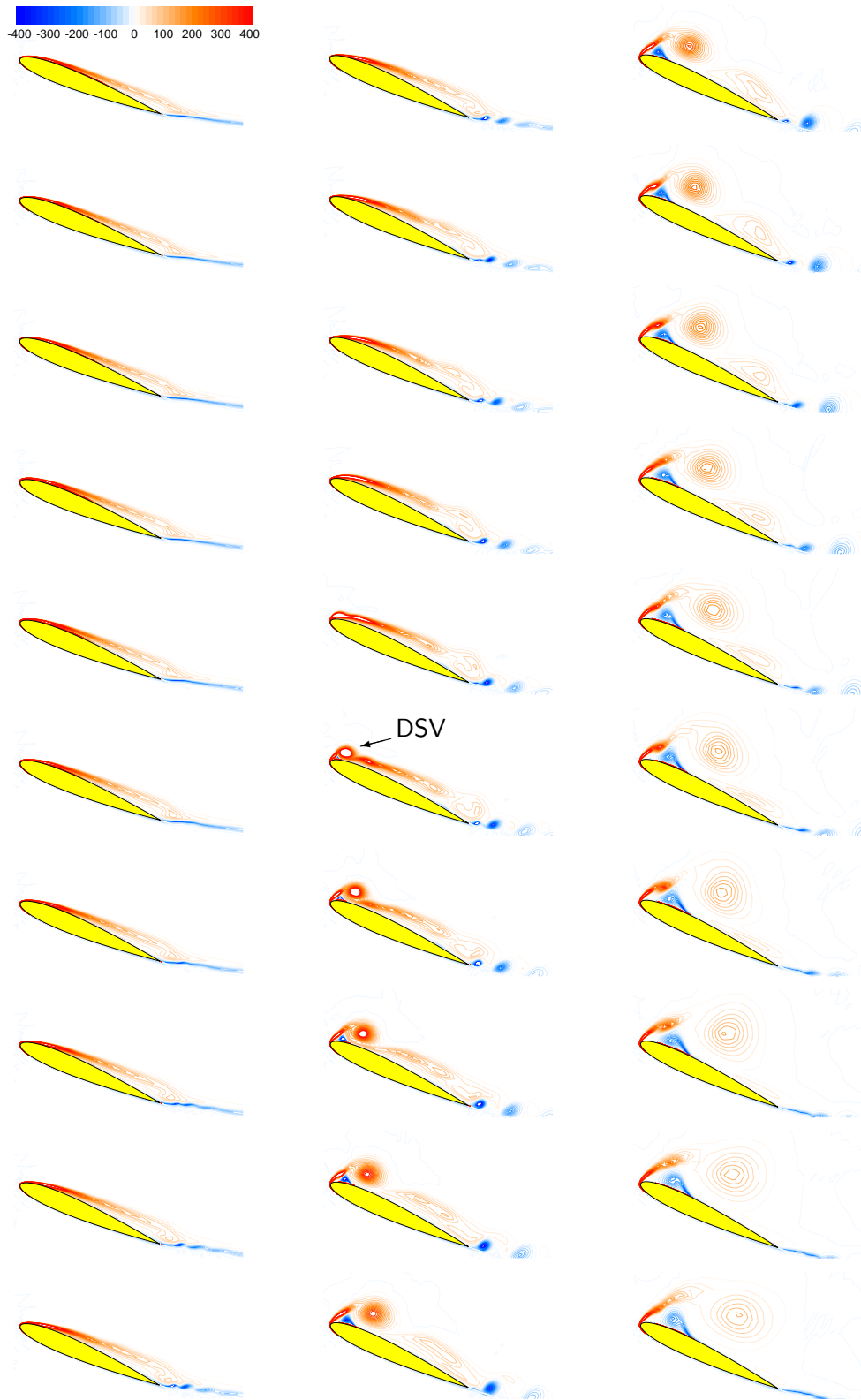


Abbildung 7.13: Isolinien der Wirbelstärke für $k_{red} = 0,15$ im Bereich $\alpha = 21,1^\circ$ bis $\alpha = 25^\circ$ (LLR $k - \omega$ Modell, $T/\Delta t = 800$)

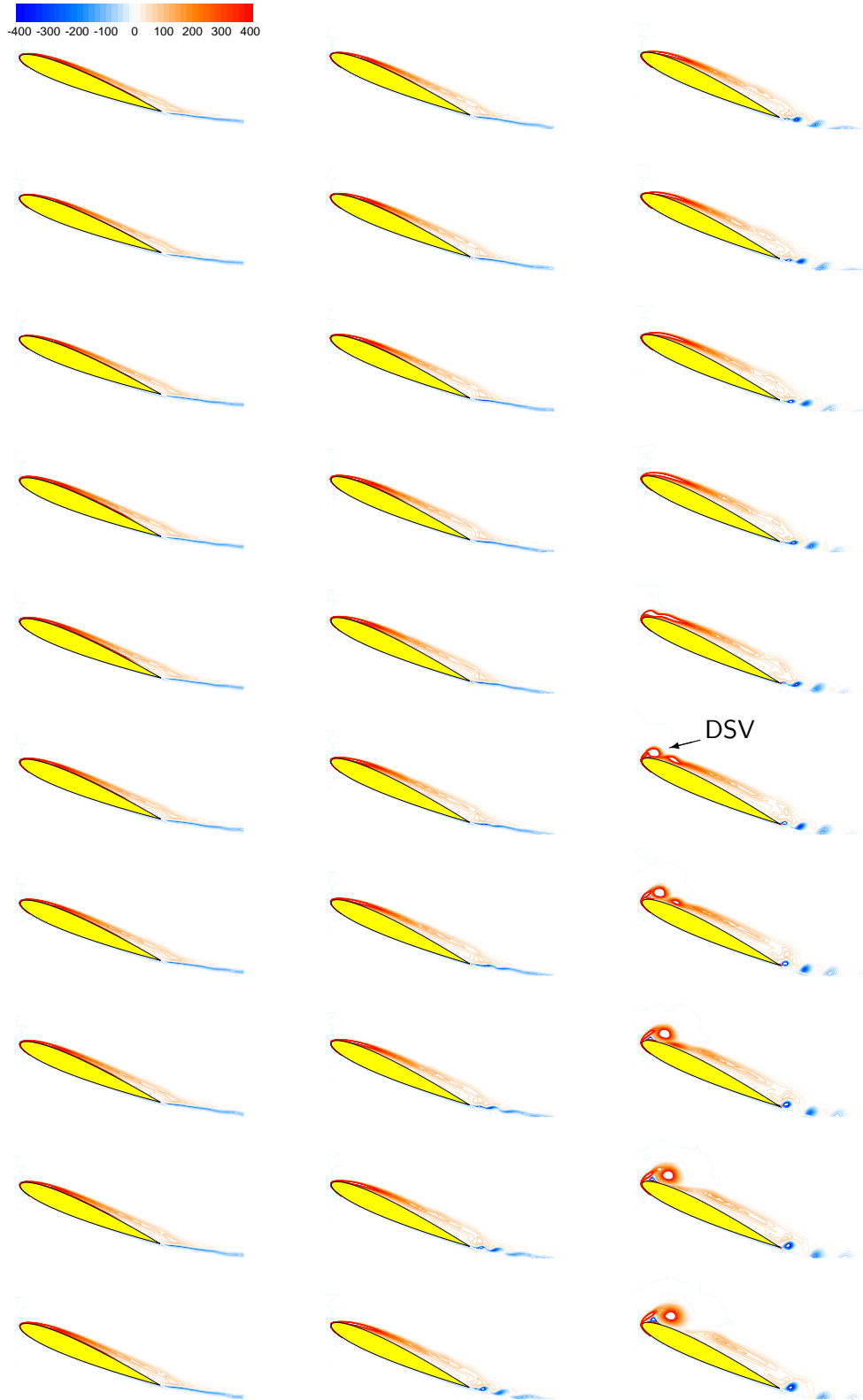


Abbildung 7.14: Isolinien der Wirbelstärke für $k_{red} = 0,25$ im Bereich $\alpha = 21,1^\circ$ bis $\alpha = 25^\circ$ (LLR $k - \omega$ Modell, $T/\Delta t = 800$)

Tabelle 7.1: Winkeländerung zwischen Gitterlinien bei $\Delta\alpha = 10^\circ$

Methode	LEM	HEM*	HEM	FAM	TFI+HEM*
Maximale Winkeländerung	4,5°	7,8°	4,5°	11,9°	14,2°
Maximale Winkeländerung am Rand	0,0°	0,0°	0,0°	10,3°	8,9°

Winkeländerungen zwischen den Gitterlinien, welche sich mit diesen Einstellungen während eines Zyklus ergeben, sind in der Tabelle 7.1 aufgeführt. Die genaue Verteilung der Winkeländerungen geht aus der Abbildung 7.15 hervor. Nach der Deformationsanalyse in Abschnitt 6.1 überrascht es nicht, dass beim Federanalogie-Modell eine Abweichung von der Randorthogonalität auftritt, welche annähernd proportional zum Drehwinkel ist. Die drei auf kontinuumsmechanischen Grundlagen basierenden Modelle lassen erwartungsgemäß die geringste Winkeländerung am Rand zu. Im Gegensatz dazu erweist sich die Transfinite Interpolation in Kombination mit dem HEM* als ungeeignet für

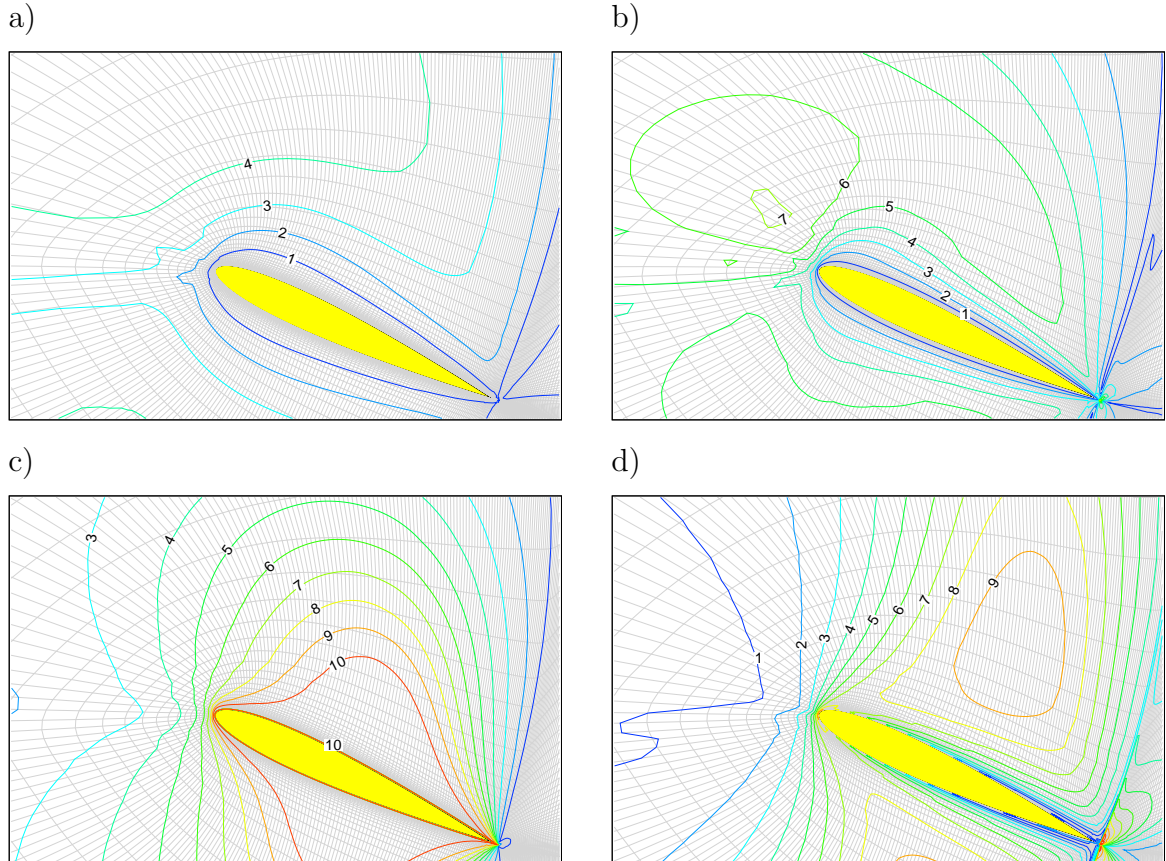


Abbildung 7.15: Winkeländerung zwischen Gitterlinien bei $\Delta\alpha = 10^\circ$ für a) Linear-elastisches Modell, b) Hyperelastisches Modell mit h^* , c) Federanalogie-Modell, d) Transfinite Interpolation mit HEM^*

das Einblockgitter, da als Folge der Randbewegung Überschneidungen benachbarter Gitterlinien auftreten. Um die Transfinite Interpolation anwenden zu können, muss die interne Blockgrenze, welche im Normalfall aufgrund der C-Topologie des Gitters eine Verlängerung der Profildicke hin zum Ausströmrand bildet, anders gelegt werden. Wird die Gittertopologie so verändert, dass die interne Blockgrenze von der Hinterkante des Tragflügels zum unteren bzw. oberen Fernfeldrand verläuft und damit das Gitter in einen vorderen und einen hinteren Block aufgeteilt, gelingt es, Überschneidungen zu verhindern. In Wandnähe beträgt die maximale Winkeländerung zwischen den Gitterlinien, welche im Verlauf eines Zyklus im Nasenbereich auftritt, sogar nur $8,9^\circ$ und damit weniger als beim Federanalogie-Modell. Die Transfinite Interpolation weist allerdings im Bereich der Hinterkante mit $14,2^\circ$ Winkeländerung absolut gesehen die größte Gitterverzerrung auf. Um die Auswirkung der Gitterverzerrung beurteilen zu können, bedarf es einer numerischen Referenzlösung. Es erscheint naheliegend, das gesamte Rechengitter starr rotieren zu lassen. Weil dabei ein durch die Verformung von Gitterzellen möglicherweise hervorgerufener Fehler a priori ausgeschlossen ist, wird dieser Weg in zahlreichen numerischen Studien, die sich mit oszillierenden Tragflügeln beschäftigen (z. B. [GPQ97, BDL98, GRC99]), beschritten. In der Abbildung 7.16 wird deutlich, dass die Gitterverzerrung nur geringen Einfluss auf den Verlauf der aerody-

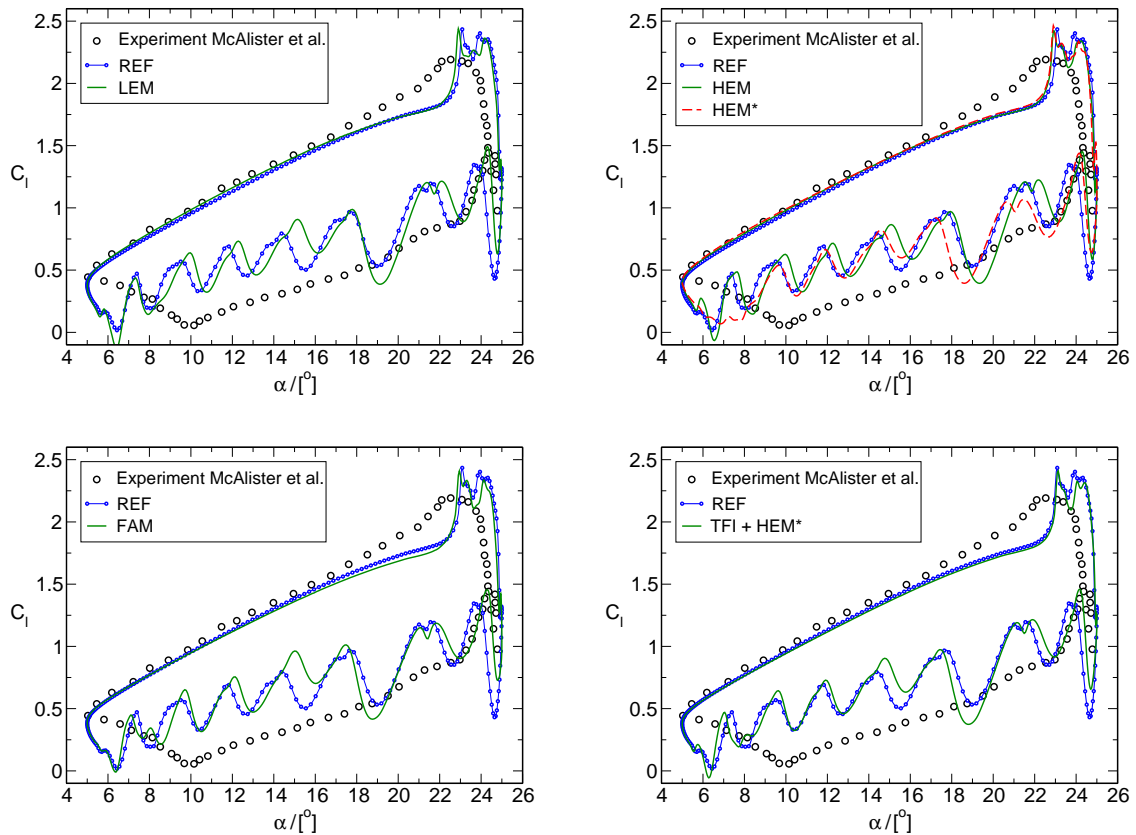


Abbildung 7.16: Hystereseschleifen der Auftriebs- und Momentenbeiwerte für unterschiedliche Gitternachführungsverfahren (LLR $k - \omega$ Modell, $T/\Delta t = 800$)

namischen Beiwerte hat. Lediglich beim Federanalogie-Modell weicht der c_l -Verlauf im Bereich von 16° bis 22° von der numerischen Referenzlösung (REF) etwas ab. In der sich daran anschließenden Phase des ‘Dynamic Stall’ kann keine vollständige Übereinstimmung erwartet werden, da der c_l -Verlauf hier von Zyklus zu Zyklus geringfügig variiert. Eine auffällige Diskrepanz besteht hinsichtlich dem Ende des plötzlichen Auftriebseinbruchs. Die numerische Referenzlösung fällt tiefer, bis auf einen Wert von 0,43, bevor eine erste Erholungsbewegung einsetzt. Dies deutet auf einen systematischen Fehler in der numerischen Referenzlösung hin. Die Ursache ist vermutlich in der Bewegung der äußeren Gebietsberandung zu suchen. Der konvektiven Randbedingung für den Ausströmrand (Gleichung 3.28) liegt in der gegenwärtigen Form der Implementierung implizit die Annahme zu Grunde, dass die Randnormale und der lokale Geschwindigkeitsvektor dieselbe Richtung haben. Diese Annahme ist bei hinreichend großer Auslenkung des Gitters strenggenommen nicht mehr erfüllt.

Neben der Qualität der an die bewegte Berandung angepassten Gitter ist der für die Gitternachführung benötigte Rechenaufwand ein weiteres wesentliches Kriterium zur Beurteilung der unterschiedlichen Methoden. Aus der Tabelle 7.2 geht hervor, dass der Anteil der Gitternachführung am gesamten Rechenzeitbedarf des numerischen Verfahrens nahezu unabhängig von der gewählten Zeitschrittweite ist. Die Tabelle 7.3 führt

Tabelle 7.2: *Rechenzeitbedarf für das LEM bei verschiedenen Zeitschrittweiten*

Zeitschritte/Zyklus	200	400	800	1600	3200
Rechenzeit/Zyklus in sec	51570	75680	97573	128675	159868
Anteil der Gitternachführung	5,2 %	4,3 %	5,0 %	6,0 %	6,2 %

den Anteil der anderen Methoden am gesamten Rechenzeitbedarf auf. Das Hyperelastische Modell mit h^* und die Transfinite Interpolation + HEM* sind etwa gleich schnell wie das Linear-elastische Modell. Damit kann die Transfinite Interpolation ihre eigentliche Stärke in diesem Fall nicht ausspielen. Das trifft in gleicher Weise auch für das Federanalogie-Modell zu. Am meisten Rechenzeit beansprucht erwartungsgemäß die aufwendigste Methode, das Hyperelastische Modell mit h . Der höhere Anteil von rund 10 % am Gesamtaufwand ist aber immer noch relativ klein und somit nicht als wesentlicher Nachteil anzusehen. Die Effizienz der Methoden zur Gitternachführung hängt

Tabelle 7.3: *Anteil der Gitternachführung am Rechenzeitbedarf für verschiedene Methoden*

Methode	LEM	HEM*	HEM	FAM	TFI+HEM*
Anteil der Gitternachführung	5,0 %	5,3 %	9,9 %	6,9 %	5,2 %

maßgeblich von der Vorgabe einer guten Startlösung ab. Dazu wird üblicherweise eine lineare Interpolation des Verschiebungsfeldes aus zwei zurückliegenden Zeitebenen verwendet.

Das kombinierte Verfahren Transfinite Interpolation + HEM* bewährt sich bei dieser Anwendung nicht. Die Gitterqualität ist schlechter als bei den anderen Methoden. Darüberhinaus stellt sich auch nicht der erhoffte Geschwindigkeitsvorteil ein. Hinzu kommt, dass die internen Blockgrenzen verändert werden mussten, um die Methode überhaupt einsetzen zu können. Das Federanalogie-Modell ist ebenfalls nur zweite Wahl und zwar sowohl hinsichtlich der Gitterqualität als auch des Rechenzeitbedarfs. Im Gegensatz dazu erfüllen die drei auf kontinuumsmechanischen Grundlagen basierenden Modelle die gestellten Anforderungen, wobei das Linear-elastische Modell in diesem Fall insgesamt am besten abschneidet.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein numerisches Verfahren zur Simulation von zweidimensionalen Strömungen in zeitveränderlichen Gebieten entwickelt. Als Ausgangspunkt diente ein anhand von zahlreichen stationären Testfällen validiertes Programm, welches die inkompressiblen Reynolds-gemittelten Navier-Stokes'schen Gleichungen unter Verwendung einer blockstrukturierten Diskretisierung des Berechnungsgebietes löst. Eine zu Beginn durchgeführte Literaturanalyse hat ergeben, dass die Transformation der strömungsmechanischen Bilanzgleichungen auf die 'Arbitrary Lagrangian-Eulerian'-Form einen besonders vielversprechenden und eleganten Ansatz zur Lösung der gestellten Aufgabe darstellt. Die praktische Durchführung erforderte eine sorgfältige Verifikation der programmtechnischen Implementierung des entsprechend modifizierten numerischen Verfahrens. Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit war die Analyse, Verbesserung und Neuentwicklung von Methoden zur Gitternachführung. Die wichtigsten Ergebnisse sind nachfolgend zusammengefasst.

Das VCL wird bei numerischen Verfahren zur Strömungssimulation vielfach nicht berücksichtigt. Die zentrale Rolle, welche das VCL bei der ausführlichen Herleitung der ALE-Form einer generischen Bilanzgleichung spielt, hebt indes seine Bedeutung als einen integralen Bestandteil des numerischen Verfahrens hervor. Als Folge der Transformation der Bilanzgleichungen auf ALE-Form werden Erweiterungen der ursprünglich verwendeten Diskretisierung notwendig. Die Bestimmung der Gittergeschwindigkeit muss konsistent zum VCL erfolgen. Es ist allgemein üblich, hierzu eine lediglich erster Ordnung genaue Approximation zu verwenden. Diese Beschränkung erweist sich jedoch als unnötig. Aus dem diskreten VCL kann ohne weiteres auch eine wesentlich genauere Approximation der Gittergeschwindigkeit hergeleitet werden. Besondere Aufmerksamkeit verlangt in diesem Zusammenhang die Behandlung der Randbedingungen. Während sich die Normalkomponente der Gittergeschwindigkeit aus dem diskreten VCL ergibt, muss die an festen Wänden benötigte Tangentialkomponente aus einem Finite-Differenzen-Ansatz bestimmt werden.

Zur Überprüfung des numerischen Verfahrens werden verschiedene Teilaspekte einer komplexen Strömungskonfigurationen, wie z. B. die Deformation der Gitterzellen oder die Auswirkungen der Randbewegung, getrennt untersucht. Ein neuer Testfall ermöglicht es, auch bei turbulenten Strömungen die vom ALE-Formalismus eingebrachten Approximationen bzw. Diskretisierungsfehler zu identifizieren und zu quantifizieren. Ein wichtiges Ergebnis ist die Erkenntnis, dass eine zeitliche Diskretisierung

zweiter Ordnung der ALE-Gleichungen nicht nur möglich ist, sondern aufgrund einer deutlichen Genauigkeitsverbesserung gegenüber der in früheren Arbeiten zumeist verwendeten zeitlichen Diskretisierung erster Ordnung unbedingt vorzuziehen ist.

Die meisten Methoden bleiben bei der Anwendung auf praxisrelevante Problemstellungen bezüglich der erzielbaren Gitterqualität hinter den Erwartungen zurück. Die Ursachen für das Versagen kann mittels einer Deformationsanalyse aufgedeckt werden. Die Laplace-Gleichung liefert aufgrund großer Verzerrungskonzentrationen an stark gekrümmten Rändern oder Ecken zumeist unbrauchbare Rechengittern. Die Diffusionsgleichung und das Federanalogie-Modell sind nicht in der Lage elementare Starrkörperbewegungen wiederzugeben, wodurch die Wandorthogonalität des Rechengitters verloren geht. Der Fehler ist dabei in erster Näherung proportional zum Drehwinkel des Rotationsanteils der Randbewegung. Das Linear-elastische Modell weist prinzipiell dieselbe Schwäche auf, wobei in diesem Fall der entsprechende Fehler bei hinreichend kleinen Drehwinkeln jedoch vernachlässigbar ist. Bei der Transfiniten Interpolation hängt die Gitterqualität maßgeblich von der Einfachheit des Ausgangsgitters ab. Ein großer Nachteil der Transfiniten Interpolation besteht darin, dass sie nicht ohne weiteres bei komplexeren Gitter-Topologien eingesetzt werden kann.

Diese unbefriedigende Situation gab den Anlass dazu, einen neuen Ansatz zu entwickeln. Anstatt zu versuchen, mittels einer heuristischen Methode ein mehr oder weniger gutes Gitter zu erzeugen, wird hierbei aus der Forderung, ein optimales Gitter zu finden, eine praxistaugliche Methode hergeleitet. Als Ausgangspunkt dient ein ursprünglich für andere Anwendungen entwickeltes Verfahren. Dabei wird das Rechengitter als hyperelastisches Material betrachtet. Die einheitliche Darstellung der Strukturanalogie-Modelle weist den Weg zu einem effizienten und robusten Lösungsalgorithmus. Die für jedes Strukturanalogie-Modell hergeleitete Vorkonditionierungsmatrix sowie die Auswahl geeigneter Neustart- und Konvergenzkriterien garantieren dabei eine überlegene Leistungsfähigkeit des verwendeten konjugierte-Gradienten-Verfahrens.

In neueren Fachveröffentlichungen findet sich die Anregung, die Transfinite Interpolation mit einem Strukturanalogie-Modell zu kombinieren. Diese vielversprechende Idee wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit umgesetzt. Der Anwendungsbereich der Transfiniten Interpolation vergrößert sich durch die Kombination mit einem Hyperelastischen Modell deutlich. Minimale Abstriche bei der Gitterqualität in Verbindung mit teilweise beträchtlichen Geschwindigkeitsvorteilen lassen diesen Ansatz in manchen Fällen sehr attraktiv erscheinen. Das grundlegende Problem der Transfiniten Interpolation wird jedoch nicht gelöst. Es zeigt sich nämlich, dass Rechenzeitbedarf und Gitterqualität beim kombinierten Verfahren wesentlich von der Lage der internen Blockgrenzen abhängen und befriedigende Ergebnisse unter Umständen erst nach einer Modifikation der Gittertopologie erzielt werden können.

Insgesamt betrachtet liefern die Hyperelastischen Modelle die besten Resultate. Das Linear-elastische Modell erweist sich allerdings bei Randbewegungen mit geringem Rotationsanteil als ebenbürtig und besticht durch ein optimales Verhältnis von Rechen-

aufwand zu Gitterqualität. Durch geschickte Wahl der Gewichtsfunktionen E und g beim Linear-elastischen und bei den Hyperelastischen Modellen bzw. des Parameters n beim Federanalogie-Modell kann der Anwender großen Einfluss auf die Qualität der deformierten Gitter nehmen.

Der letzte Punkt der Aufgabenstellung umfasst die Integration des Moduls zur Gitternachführung in den Strömungslöser sowie eine Anwendungsdemonstration des Gesamtverfahrens. Der hierbei betrachtete Fall des oszillierenden Tragflügels weist den Vorteil auf, dass umfangreiche Meßdaten von einem Windkanalversuch vorliegen. Außerdem kann eine numerische Referenzlösung ermittelt werden, welche benötigt wird, um beurteilen zu können, ob die Gitterverformung eine Verfälschung der Lösung zur Folge hat. Mit Ausnahme des Federanalogie-Modells, bei dem eine leichte Verschlechterung auftrat, war dies nicht der Fall. Die Ergebnisse der Strömungssimulation zeigen zumindest für die Aufwärtsbewegung des Tragflügels eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Das im Windkanalversuch auffälligste Strömungsphänomen, der ‘Dynamic Stall Vortex’, spielt auch in den numerischen Lösungen eine zentrale Rolle für den Verlauf der aerodynamischen Beiwerte. Im Bereich des maximalen Anstellwinkels und der nachfolgenden Phase massiver Strömungsablösung treten erwartungsgemäß Abweichungen auf, welche auf Defizite bei der Turbulenzmodellierung zurückzuführen sind. Der Anteil der Gitternachführung am gesamten Rechenzeitbedarf des Simulationsverfahrens beträgt bei allen untersuchten Methoden weniger als 10 %. Er fällt damit kaum ins Gewicht.

Nachdem die gesteckten Ziele erreicht wurden und auch die prinzipielle Eignung der Strukturanalogie-Modelle für unstrukturierte bzw. hybride Rechengitter bereits demonstriert werden konnte, sollte als nächster Schritt die Erweiterung des Verfahrens auf dreidimensionale Problemstellungen erfolgen.

A Tensoranalysis

Physikalische Größen sind invariant bezüglich einer Translation oder Rotation des Koordinatensystems. Sie lassen sich deshalb am besten durch Tensoren mathematisch beschreiben. Dies ist auch in der vorliegenden Arbeit geschehen, weshalb es zweckmäßig erscheint, die wichtigsten hier verwendeten Begriffe aus der Tensoranalysis kurz zu erläutern. Eine weitergehende Einführung in dieses Thema gibt Schade [Sch96].

Es werden nur zweidimensionale Problemstellungen betrachtet. Aus diesem Grunde haben alle laufenden Indizes, d.h. Indizes auf die die Einsteinsche Summationskonvention angewandt wird, den Wertevorrat $\{1, 2\}$.

Die Koordinatentransformation

$$x_\alpha = x_\alpha(\xi^\beta), \quad (\text{A.1})$$

welche für das numerische Verfahren von grundlegender Bedeutung ist, tritt in den verschiedenen tensoriellen Gleichungen durch die Elemente der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

in Erscheinung; vor allem in Form der Jacobi-Determinante

$$J = \text{Det} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^\beta} \right) = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad (\text{A.3})$$

sowie den Adjunkten der Jacobi-Matrix

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Um Tensoren zahlenmäßig darstellen zu können, benötigt man ein Koordinatensystem; am einfachsten gelingt dies mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems mit den Basisvektoren \mathbf{e}_α :

$$\Phi = \Phi^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha = \Phi_1 \mathbf{e}_1 + \Phi_2 \mathbf{e}_2. \quad (\text{A.5})$$

Durch die Transformationsgleichung A.1 lässt sich dem kartesischen Koordinatensystem ein krummliniges Koordinatensystem zuordnen. Dieses wird als kovariante Basis bezeichnet und ist gegeben durch:

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_\beta. \quad (\text{A.6})$$

Die Basisvektoren des kovarianten Koordinatensystems sind Tangentenvektoren der krummlinigen Koordinatenlinien ξ^β . Die hierzu reziproke Basis ist die sogenannte kontravariante Basis. Sie ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{g}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\beta} \mathbf{e}_\beta. \quad (\text{A.7})$$

Reziproke Basen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\delta_\alpha^\beta = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta. \quad (\text{A.8})$$

Hierbei bezeichnet δ_α^β das Kronecker-Symbol. Die kovarianten Metrikkoeffizienten

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (\text{A.9})$$

und die kontravarianten Metrikkoeffizienten

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta \quad (\text{A.10})$$

werden — wie der Name schon vermuten lässt — benötigt, um Längen, Flächen, Winkel und Volumen zu messen.

In der vorliegenden Arbeit werden mit Tensoren eine Reihe von algebraischen und analytischen Operationen durchgeführt. Hierzu zählt neben dem einfachen Skalarprodukt auch die doppelte Überschiebung zweier Tensoren zweiter Stufe:

$$\Phi \cdot \cdot \Theta = \Phi^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta \cdot \cdot \Theta^{\gamma\delta} \mathbf{g}_\gamma \mathbf{g}_\delta = \Phi^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.11})$$

Als Ergebnis erhält man einen Skalar. Das dyadische Produkt zweier Vektoren bildet hingegen einen Tensor zweiter Stufe:

$$\Phi \Theta = \Phi^\alpha \Theta^\beta \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta. \quad (\text{A.12})$$

Der als Nabla-Operator bezeichnete Differentialoperator

$$\nabla = \mathbf{g}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \quad (\text{A.13})$$

verhält sich wie ein Vektor, dessen Komponenten Differentiationsbefehle sind. Für sich alleine hat der ∇ -Operator jedoch keine Bedeutung, sondern nur als Operator auf skalare, vektorielle und tensorielle Funktionen. Mit seiner Hilfe erhält man eine kompakte Darstellung der wichtigsten räumlichen Differentialoperatoren. Anders als bei der Vektoranalysis muss zwischen dem Rechtsgradienten und dem Linksgradienten eines Vektors unterschieden werden. Sie ergeben sich zu

$$\Phi \nabla = \Phi_\alpha |_\beta \mathbf{g}^\alpha \mathbf{g}^\beta \quad (\text{A.14})$$

bzw.

$$\nabla \Phi = \Phi_\beta |_\alpha \mathbf{g}^\alpha \mathbf{g}^\beta. \quad (\text{A.15})$$

Gleiches gilt für die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe. Rechtsdivergenz

$$\Phi \cdot \nabla = \Phi_{\alpha}^{\beta} |_{\beta} \mathbf{g}^{\alpha} \quad (\text{A.16})$$

und Linksdivergenz

$$\nabla \cdot \Phi = \Phi^{\beta}_{\alpha} |_{\beta} \mathbf{g}^{\alpha} \quad (\text{A.17})$$

unterschieden durch vertauschte Indizes. Die Schreibweise $|_{\beta}$ bezeichnet die kovariante Ableitung. Sie stellt eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung dar und berücksichtigt neben der Ortsabhängigkeit der Tensorkomponenten auch die der krummlinigen Basis.

B Verallgemeinerung des Energiefunktionals H für den 3D-Fall

Mit Ausnahme des Hyperelastischen Modells werden alle in Kapitel 5 diskutierten Methoden auch bei dreidimensionalen Problemstellungen zur Gitternachführung angewendet. Auf der Grundlage des von Jacquotte [Jac94] vorgeschlagenen Energiefunktionals ist eine entsprechende Verallgemeinerung des nichtlinearen Modells jedoch ohne weiteres möglich. Sie lautet:

$$H = \frac{1}{2} \int h J d\xi d\eta d\zeta, \quad (\text{B.1})$$

mit der Energiedichte

$$h = g[(\mathcal{I} + \mathcal{K} - 6\mathcal{J}) + (\mathcal{J} - 1)^2]. \quad (\text{B.2})$$

Hierbei bezeichnen \mathcal{J} , \mathcal{I} und \mathcal{K} Tensorinvarianten, welche gegeben sind durch die Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{D} , die Spur des Cauchy-Green-Tensors \mathbf{C} und die Spur des Kofaktors von \mathbf{C} :

$$\mathcal{J} = \text{Det } \mathbf{D}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{I} = \text{Sp } \mathbf{C} = C^\alpha_\alpha, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{K} = \text{SpKof } \mathbf{C} = \frac{1}{2}(C^\alpha_\alpha C^\beta_\beta - C^{\alpha\beta} C_{\beta\alpha}). \quad (\text{B.5})$$

Die Indizes haben in diesem Fall den Wertevorrat $\{1, 2, 3\}$. Die Berechnung der Invarianten ist aufwendiger als im 2D-Fall. Dies führt unter anderem dazu, dass der funktionale Zusammenhang zwischen dem Gradienten $\nabla_{\mathbf{w}} H$ und der Schrittweite $\lambda^{(k)}$ des Nullstellenproblems 5.21 nun durch ein Polynom 5. Grades gegeben ist. Als Folge davon sind sechs Funktionsauswertungen notwendig, um die Schrittweite zu bestimmen.

Die Energiedichte des 2D-Falles muss sich natürlich als Sonderfall aus Gleichung B.2 ergeben. Dies ist in der Tat der Fall, denn es gilt [Eri62]:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{2D}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{2D} + 1, \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{I}_{2D} + \mathcal{J}_{2D}^2, \quad (\text{B.8})$$

Durch Einsetzen der Gleichungen B.6 - B.8 in die Gleichung B.2 erhält man:

$$h_{2D} = 2g[(\mathcal{I}_{2D} - 2\mathcal{J}_{2D}) + (\mathcal{J}_{2D} - 1)^2]. \quad (\text{B.9})$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der Gleichung 5.56 bis auf einen Faktor 2, der jedoch für die Minimierungsaufgabe ohne Bedeutung ist, überein.

Literaturverzeichnis

- [ARH80] **A.A. Amsden, H.M. Ruppel, and C.W. Hirt.** SALE: a simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds, 1980. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-8095.
- [ATR87] **W.K. Anderson, J.L. Thomas, and C.L. Rumsey.** Extension and application of flux-vector splitting to unsteady calculations on dynamic meshes. *AIAA-87-1152-CP*, 1987.
- [AV99] **W.K. Anderson and V. Venkatakrishnan.** Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *Computers and Fluids*, 28(4–5):443–480, 1999.
- [Bar00] **R.E. Bartels.** Mesh strategies for accurate computation of unsteady spoiler and aeroelastic problems. *Journal of Aircraft*, 37(3):521–525, 2000.
- [Bat89] **J.T. Batina.** Unsteady Euler algorithm with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aeroelastic analysis. *AIAA-89-1189*, 1989.
- [Bat90] **J.T. Batina.** Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28(8):1381–1388, 1990.
- [Bat91] **J.T. Batina.** Unsteady Euler algorithm with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aerodynamic analysis. *AIAA Journal*, 29(3):327–333, 1991.
- [BDL98] **G. Barakos, D. Drikakis, and M.A. Leschziner.** Numerical investigation of the dynamic stall phenomenon using non-linear eddy-viscosity models. *AIAA-98-2740*, 1998.
- [Blo00] **F.J. Blom.** Considerations on the spring analogy. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32:647–668, 2000.
- [BMH96] **D.W. Bechert, R. Meyer, and W. Hage.** Aeroflexible Oberflächenklappen als Rückstrombremsen nach dem Vorbild der Deckfedern des Vogelflügels. In *DLR Institutsbericht 92517-96/B2*, 1996.

- [BN95] **D.G. Bishop and R.W. Noack.** An implicit flow solver with upwind differencing for three-dimensional hybrid grids. *AIAA-95-1707-CP*, Seiten 697–710, 1995.
- [Bou77] **J. Boussinesq.** Théorie de l’écoulement tourbillant. *Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, 23:46–50, 1877.
- [BRW00] **K.J. Badcock, B.E. Richards, and M.A. Woodgate.** Elements of computational fluid dynamics on block structured grids using implicit solvers. *Progress in Aerospace Sciences*, 36:351–392, 2000.
- [BSMM95] **I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig.** *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zweite Auflage, 1995.
- [Bun01] **U. Bunge,** 2001. Persönliche Kommunikation.
- [CBO00] **G. Chiandussi, G. Bugeda, and E. Onate.** A simple method for automatic update of finite element meshes. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 16:1–19, 2000.
- [CCM77] **L.W. Carr, K.W. Carr, and W.J. McCroskey.** Analysis of the development of dynamic stall based on oscillation airfoil experiments. Ames Research Center, California, 1977. NASA Technical Note TN D-8382.
- [CCW94] **M.S. Chandrasekhara, L.W. Carr, and M.C. Wilder.** Interferometric investigations of compressible dynamic stall over a transiently pitching airfoil. *AIAA Journal*, 32(3):586–593, 1994.
- [CG95] **P.I. Crumpton and M.B. Giles.** Implicit time accurate solutions on unstructured dynamic grids. *AIAA-95-1671-CP*, Seiten 285–293, 1995.
- [CHLD97] **P.A. Cavallo, A. Hosangadi, R.A. Lee, and S.M. Dash.** Dynamic unstructured grid methodology with application to aero/propulsive flow-fields. *AIAA-97-2310*, 1997.
- [CJ87] **I.P. Castro and J.M. Jones.** Studies in numerical computations of recirculating flows. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7:793–823, 1987.
- [DK97] **H. Deconinck and B. Koren** *Euler and Navier-Stokes solvers using multi-dimensional upwind schemes and multigrid acceleration*. Vieweg-Verlag, 1997.
- [DP88] **I. Demirdžić and M. Perić.** Space conservation law in Finite Volume calculations of fluid flow. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8:1037–1050, 1988.

- [DP90] **I. Demirdžić and M. Perić.** Finite Volume Method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 10:771–790, 1990.
- [DS83] **J.E. Dennis and R.B. Schnabel.** *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice-Hall, 1983.
- [Dup95] **S. Duplantier.** *Étude expérimentale d’un sillage confiné se développant en aval d’un corps d’arrêt: influence de la combustion sur la structure du sillage*. Dissertation, Université de Poitiers, Frankreich, 1995.
- [Eri62] **A.C. Eringen.** *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill Book Company, 1962.
- [Eri94] **L.E. Ericsson.** Problem of dynamic stall simulation revisited. *Journal of Aircraft*, 31(4):782–786, 1994.
- [Eul00] **F. Eulitz.** *Numerische Simulation und Modellierung der instationären Strömung in Turbomaschinen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [FP96] **J.H. Ferziger and M. Perić.** *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1996.
- [Fre93] **C.J. Freitas.** Editorial policy statement on the control of numerical accuracy. *Journal of Fluids Engineering*, 115:340, 1993.
- [Fre95] **C.J. Freitas.** Perspective: selected benchmarks from commercial CFD codes. *Journal of Fluids Engineering*, 117:208–218, 1995.
- [Gar98] **V.K. Garg.** *Applied computational fluid dynamics*. Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [GB91] **M. Gad-el-Hak and D.M. Bushnell.** Separation control: review. *Journal of Fluids Engineering*, 113:5–29, 1991.
- [GH73] **W.J. Gordon and C.A. Hall.** Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.
- [GL88] **P.H. Gaskell and A.K.C. Lau.** Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8:617–641, 1988.
- [GPQ97] **E. Guilmineau, J. Piquet, and P. Queutey.** Unsteady two-dimensional turbulent viscous flow past airfoils. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(3):315–366, 1997.

- [GRC99] **W. Geissler and L.P. Ruiz-Calavera.** Transition and turbulence modelling for dynamic stall and buffet. In *4th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Korsika, Frankreich*, 1999.
- [GS95] **A.L. Gaitonde and S.P.Fiddes.** A three-dimensional moving mesh method for the calculation of unsteady transonic flows. *Aeronautical Journal*, 99:150–160, 1995.
- [GW98] **M.S. Gadala and J. Wang.** A practical procedure for mesh motion in arbitrary Lagrangian-Eulerian Method. *Engineering with Computers*, 14:223–234, 1998.
- [HAC74] **C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.C. Cook.** An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.*, 14:227, 1974.
- [Har84] **A. Harten.** On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Analysis*, 21(1):1–23, 1984.
- [HBB00] **M. Hesse, G. Britten, and J. Ballman.** A multi-block grid deformation algorithm for aeroelastic analysis. In *7th Int. Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Whistler, Kanada*, 2000.
- [Hie99] **K.-H. Hierholz.** *Simulation der Strömungs-Struktur-Wechselwirkung am Hubschrauberrotor*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [Hin82] **R.G. Hindman.** Generalized coordinate forms of governing fluid equations and associated geometrically induced errors. *AIAA Journal*, 20(10):1359–1367, 1982.
- [Hir92a] **C. Hirsch.** *Numerical computation of internal and external flow. volume1: fundamentals of numerical discretisation*. John Wiley & Sons Ltd., 1992.
- [Hir92b] **C. Hirsch.** *Numerical computation of internal and external flow. volume2: computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley & Sons Ltd., 1992.
- [HY93] **C.J. Hwang and S.Y. Yang.** Locally implicit total variation diminishing schemes on mixed quadrilateral-triangular meshes. *AIAA Journal*, 31(11):2008–2015, 1993.
- [ICT⁺95] **A. Ilinca, R. Camarero, J.-Y. Trépanier, M. Reggio, and J. Godin.** A new adaptive technique using moving grids. *AIAA-95-0669*, 1995.

- [Ili94] **A. Ilinca.** *Calcul des écoulements compressibles tridimensionnels sur des maillages en mouvement et adaptifs.* Dissertation, Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal Québec, Kanada, 1994.
- [IT98] **S.A. Ivanenko and L.I. Turchak.** A variational barrier method for grid generation in three dimension. In *6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Greenwich, Großbritannien*, 1998.
- [Jac88] **O.-P. Jacquotte.** A mechanical model for a new grid generation method in computational fluid dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 66:323–338, 1988.
- [Jac91] **O.-P. Jacquotte.** Recent progress on mesh optimization. In *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*. Elsevier, 1991.
- [Jac94] **O.-P. Jacquotte.** Structured grid generation: algebraic method, optimization and adaption. In *Grid Generation, Lecture Series 1994-02, von Karman Institute for Fluid Dynamics*, 1994.
- [Jah94] **J. Jahn.** *Introduction to the theory of nonlinear optimization.* Springer-Verlag, 1994.
- [Jam95] **A. Jameson.** Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1 artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. *Int. Journal of Computational Fluid Dynamics*, 5:1–38, 1995.
- [JC92] **O.-P. Jacquotte and G. Coussement.** Structured mesh adaption: space accuracy and interpolation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101:397–432, 1992.
- [JFH⁺95] **D.J. Jones, F. Fortin, D. Hawken, G.F. Syms, and Y. Sun.** The computation of aircraft store trajectories using hybrid (structured/unstructured) grids. In *AGARD FDP Symposium on "Progress and Challenges in CFD Methods and Algorithms"*, Spanien, CP-578, 1995.
- [JHL72] **J.P. Johnston, R.M. Halleen, and D.K. Lezius.** Effects of streamwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 56:533–557, 1972.
- [JL97] **M.S. Joun and M.C. Lee.** Quadrilateral finite-element generation and mesh quality control for metal forming simulation. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4059–4075, 1997.

- [JM98] **A. Jameson and L. Martinelli.** Mesh refinement and modeling errors in flow simulation. *AIAA Journal*, 36(5):676–686, 1998.
- [JT94] **A.A. Johnson and T.E. Tezduyar.** Mesh updating strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 119:73–94, 1994.
- [KF99] **B. Koobus and C. Farhat.** Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 170:103–129, 1999.
- [Knu99] **P.M. Knupp.** Matrix norms & the condition number. In *8th International Meshing Roundtable, Lake Tahoe NV, USA*, 1999.
- [Knu00] **P.M. Knupp.** Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part II – A framework for volume mesh optimization and the condition number of the jacobian matrix. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1165–1185, 2000.
- [Kos93] **P. Kosmol.** *Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben.* Teubner-Verlag, 1993.
- [KR74] **P.K. Khosla and S.G. Rubin.** A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers and Fluids*, 2:207–209, 1974.
- [Kub97] **F. Kubsch.** Herleitung und Implementierung mehrdimensionaler Differenzenschemata höherer Ordnung. Technische Universität Berlin, HFI, Diplomarbeit, 1997.
- [Lai93] **Y.G. Lai.** CFD simulation of automotive IC engines with advanced moving grid and multi-domain methods. *AIAA-93-2953*, 1993.
- [Leo79] **B.P. Leonard.** A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 19:59–98, 1979.
- [Leo88] **B.P. Leonard.** Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8:1291–1318, 1988.
- [LF95] **M. Lesoinne and C. Farhat.** Geometric conservation laws for aeroelastic computations using unstructured dynamic meshes. *AIAA-95-1709-CP*, 1995.
- [LJ76] **D.K. Lezius and J.P. Johnston.** Roll-cell instabilities in rotating laminar and turbulent channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 77:153–175, 1976.

- [LL94a] **F.S. Lien and M.A. Leschziner.** A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, part 1: computational implementation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 114:123–167, 1994.
- [LL94b] **F.S. Lien and M.A. Leschziner.** Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 19:527–548, 1994.
- [LMPS97] **Ž. Lilek, S. Muzaferija, M. Perić, and V. Seidl.** An implicit finite-volume method using non-matching blocks of structured grid. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 32:385–401, 1997.
- [LO80] **D.R. Lynch and K. O’Neill.** Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions. In S.Y. Wang, *Finite Elements in water resources*. University of Mississippi, 1980.
- [LRB93] **E.M. Lee-Rausch and J.T. Batina.** Calculation of agard wing 445.6 flutter using Navier-Stokes aerodynamics. *AIAA-93-3476*, 1993.
- [LTY87] **B.E. Launder, D.P. Tselepidakis, and B.A. Younis.** A second-moment closure study of rotating channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 183:63–75, 1987.
- [LY96] **R. Löhner and C. Yang.** Improved ALE mesh velocities for moving bodies. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 12:599–608, 1996.
- [MCM76] **W.J. McCroskey, L.W. Carr, and K.W. McAlister.** Dynamic stall experiments on oscillating airfoils. *AIAA Journal*, 14(1):57–63, 1976.
- [Men92] **F.R. Menter.** Influence of freestream values on $k - \omega$ turbulence model predictions. *AIAA Journal*, 30(6):1657–1659, 1992.
- [Men94] **F.R. Menter.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [MMCP82] **W.J. McCroskey, K.W. McAlister, L.W. Carr, and S.L. Pucci.** An experimental study of dynamic stall on advanced airfoil sections volume 1. summary of the experiment. Ames Research Center, NASA Technical Memorandum 84245, California, 1982.
- [MMV97] **S.A. Morton, R.B. Melville, and M.R. Visbal.** Accuracy and coupling issues of aeroelastic Navier-Stokes solutions of deforming meshes. *AIAA-97-1085*, 1997.
- [MRZ92] **S. Majumdar, W. Rodi, and J. Zhu.** Three-dimensional Finite-Volume Method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Fluids Engineering*, 114:496–503, 1992.

- [NG94] **B. Nkonga and H. Guillard.** Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113:183–204, 1994.
- [NGH98] **P. Nordlund, A.E. Giannakopoulos, and B. Häggblad.** Adaptive mesh-updating methods for non-linear finite element analysis of shells. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:1523–1544, 1998.
- [Noh64] **W.F. Noh.** CEL: a time-dependent two-space-dimensional coupled Eulerian-Lagrange code. In B. Alder et al., *Methods in Computational Physics*, volume 3, Seiten 117–179. Academic Press, 1964.
- [Nol93] **B. Noll** *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 1993.
- [Pat80] **S.V. Patankar.** *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill, 1980.
- [Pea92] **W.H. Press and et al.** *Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Zweite Auflage, 1992.
- [Pir89] **O. Pironneau.** *Finite Elements Methods for fluids*. John Wiley & Sons, 1989.
- [PZ92] **J. Panda and K.B.M.Q. Zaman.** Experimental invistigation of the flow field of an oscillating airfoil. *AIAA-92-2622*, 1992.
- [Rey95] **O. Reynolds.** On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society, London*, 186-I:123–164, 1895.
- [Rhi81] **C.M. Rhie.** *A numerical study of the flow past an isolated airfoil with separation*. Dissertation, University of Illinois, Urbana, USA, 1981.
- [Roo99] **H.-G. Roos** *Numerische Mathematik*. Teubner-Verlag, 1999.
- [RST96] **H.G. Roos, M. Stynes, and L. Tobinska.** *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*. Springer-Verlag, 1996.
- [RT96] **T. Rung and F. Thiele.** Computational modelling of complex boundary-layer flows. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Transport Phenomena in Thermal-Fluid Engineering (ISTP-9)*, 1996.
- [Run97] **T. Rung.** *An Introduction to the CFD Software Package ELAN2*. Technische Universität Berlin, HFI, Interner Bericht, 1997.
- [Run98] **T. Rung.** Realizability linearer stress-strain Beziehungen. Technische Universität Berlin, HFI, Institutsbericht 04/98, 1998.

- [Run99] **T. Rung.** Formulierung universeller Wandrandbedingungen für Transportgleichungsturbulenzmodelle. Technische Universität Berlin, HFI, Institutsbericht 02/99, 1999.
- [Run00] **T. Rung.** *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken.* Dissertation, Technische Universität Berlin, 2000.
- [SBLT00] **M. Schatz, U. Bunge, H. Lübcke, and F. Thiele.** Flow simulation around movable flaps under high-lift conditions. In *ICTAM 2000, Chicago, USA*, 27.8 - 2.9.2000.
- [Sch90] **B. Schönung.** *Numerische Strömungsmechanik.* Springer-Verlag, 1990.
- [Sch95] **H. Schade.** Kontinuumsphysik, 1995. Vorlesungsskript.
- [Sch96] **H. Schade.** *Tensoranalysis.* de Gruyter-Verlag, 1996.
- [Sch97] **H.R. Schwarz.** *Numerische Mathematik.* Teubner-Verlag, 1997.
- [Sch01] **M. Schatz, 2001.** Persönliche Kommunikation.
- [Shy96] **W. Shyy.** *Computational fluid dynamics with moving boundaries.* Taylor & Francis, 1996.
- [SK80] **H. Schade and E. Kunz.** *Strömungslehre.* de Gruyter-Verlag, 1980.
- [SK01] **M. Shashkov and P. Knupp.** Optimization-based reference-matrix rezone strategies for arbitrary Lagrangian-Eulerian methods on unstructured meshes. In *10th International Meshing Roundtable, Newport Beach, Kalifornien, USA*, Seiten 167–176, 2001.
- [SNB95] **K.P. Singh, J.C. Newman, and O. Baysal.** Dynamic unstructured method for flows past multiple objects in relative motion. *AIAA Journal*, 33(4):641–649, 1995.
- [SOL00] **M. Souli, A. Ouahsine, and L. Lewin.** ALE formulation for fluid-structure interaction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:659–675, 2000.
- [Son00] **B.K. Soni.** Grid generation: past, present, and future. *Applied Numerical Mathematics*, 32:361–369, 2000.
- [SR92] **Q. Shi and R.J. Ribando.** Numerical simulations of viscous rotating flows using a new pressure-based method. *Computers and Fluids*, 21(4):475–489, 1992.

- [Sto68] **H.L. Stone.** Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. Numer. Analysis*, 5:530–558, 1968.
- [Tel81] **D.P. Telionis.** *Unsteady viscous flows*. Springer-Verlag, 1981.
- [TL79] **P.D. Thomas and C.K. Lombard.** Geometric Conservation Law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*, 17(10):1030–1037, 1979.
- [TRPC92] **J.Y. Trépanier, M. Reggio, M. Paraschivoiu, and R. Camarero.** Unsteady Euler solutions for arbitrarily moving bodies and boundaries. *AIAA-92-0051*, 1992.
- [TT61] **J.G. Trulio and K.R. Trigger.** Numerical solution of the one-dimensional hydrodynamic equations on an arbitrary time-dependent coordinate system. University of California Lawrence Radiation Laboratory Report UCLR-6522, 1961.
- [VG76] **H. Viviand and W. Ghazzi.** Numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers with applications to the blunt body problem. In *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1976.
- [Vin89] **M. Vinokur.** An analysis of Finite-Difference and Finite-Volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 81:1–52, 1989.
- [Wal99] **W.A. Wall.** *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [Wan71] **K.C. Wang.** On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 48:397–404, 1971.
- [Wic01] **A. Wick.** Generation of dynamic grids using structural analogy. In *10th International Meshing Roundtable, Newport Beach, Kalifornien, USA*, Seiten 261–267, 2001.
- [Wil88] **D.C. Wilcox.** Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [Wil93] **D.C. Wilcox.** *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industrie, Inc., La Cañada, Kalifornien, USA, 1993.
- [WP94] **Z.J. Wang and A.J. Przekwas.** Unsteady flow computation using moving grid with mesh enrichment. *AIAA-94-0285*, 1994.

- [WP97] **K. Willcox and J. Peraire.** Aeroelastic computations in the time domain using unstructured meshes. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40(13):2413–2431, 1997.
- [WTC⁺00] **A.S.F. Wong, H.M. Tsai, J. Cai, Y. Zhu, and F. Liu.** Unsteady flow calculations with a multi-block moving mesh algorithm. *AIAA-2000-1002*, 2000.
- [WY94] **Z.J. Wang and H.Q. Yang.** Unsteady flow simulation using a zonal multi-grid approach with moving boundaries. *AIAA-94-0057*, 1994.
- [You93] **B.A. Younis.** Prediction of turbulent flows in rotating rectangular ducts. *Journal of Fluids Engineering*, 115:646–652, 1993.
- [ZL95] **X. Zheng and F. Liu.** Staggered upwind method for solving Navier-Stokes and $k - \omega$ turbulence model equations. *AIAA Journal*, 33(6):991–998, 1995.
- [ZRTC93] **H. Zhang, M. Reggio, J.Y. Trépanier, and R. Camarero.** Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes. *Computers and Fluids*, 22(1):9–23, 1993.